เอกสารการสอน

วิชา 734465 สถิติทางชีววิทยา

(Statistics in Biological Science)

อ.อัจฉริยา ปราบอริพ่าย

คณะศิลปศาสตร์และวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

ภาคปลาย ปีการศึกษา 2541

บทที่ 1
การวิเคราะห์ความแปรปรวน
(Analysis of Variance)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนคือ เทคนิคที่ใช้แสดงความแปรปรวนทั้งหมดของข้อมูลชุดหนึ่งออกเป็น 2 ส่วน หรือมากกว่า ซึ่งแต่ละส่วนมาจากแหล่งของความแปรปรวนแหล่งต่าง ๆ การวิเคราะห์ความแปรปรวนใช้มากในการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง วัตถุประสงค์เพื่อ (1) การประมาณความแปรปรวนของประชากร และทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแปรปรวนของประชากร (2) การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร และทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร การวิเคราะห์ความแปรปรวนจะใช้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยหรือ ความแปรปรวนของประชากรตั้งแต่ 3 กลุ่มขึ้นไป ตัวอย่างเช่น เราต้องการทราบประสิทธิภาพของยา 3 ชนิด ว่าให้ผลแตกต่างกัน หรือไม่ในการลดคอเลสเตอรอลในคน ดำเนินการทดลองโดยสุ่มให้บางคนได้รับยา A สุ่มบางคนให้ได้รับยา B และสุ่มบางคนให้ได้รับยา C หลังจากช่วงระยะเวลาหนึ่งวัดคอเลสเตอรอลของแต่ละคน พบว่าระดับคอเลเตอรอลของแต่ละคนลดลงไม่เท่ากัน หรือพูดอีกอย่างหนึ่งคือ มีความแปรปรวนระหว่างการวัด เหตุผลหนึ่งอาจเนื่องมาจากแต่ละคนได้รับยาไม่เหมือนกัน และเมื่อพิจารณาเฉพาะคนที่ได้รับยา A ก็ปรากฏว่าระดับคอเลสเตอรอลของแต่ละคนก็ลดลงไม่เท่ากัน ซึ่งก็พบเช่นเดียวกันกับกลุ่มที่ได้รับยา B และ C เราจะเห็นว่ามีความแปรปรวนระหว่างการวัดภายในทรีทเมนต์เดียวกัน เหตุผลอาจมาจากความแตกต่างทางร่างกายของแต่ละคนและการรับประทานอาหาร เราจึงใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อหาข้อสรุปของยาทั้ง 3 ชนิดนี้ ซึ่งมีความแปรปรวนระหว่างทรีทเมนต์ และภายในทรีทเมนต์ว่ามีประสิทธิภาพเหมือนกันหรือไม่

1. เหตุผลการใช้วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน

สำหรับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากร 2 ประชากรว่าเหมือนกันหรือแตกต่างกัน เราสามารถทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้สถิติทดสอบ คือ Student t แต่ถ้าเราต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรมากกว่า 2 ประชากร ตัวอย่างเช่น 5 ประชากร เราต้องทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างเป็นรายคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ${}^{5}C_{2} = 10$ คู่ โดยใช้สถิติทดสอบคือ Student t 10 ครั้ง ซึ่งเสียเวลามากและอาจทำให้สรุปผลการทดลองไม่ถูกต้อง

ตัวอย่างเช่นการสุ่มกลุ่มตัวอย่างมา 5 กลุ่ม จากประชากรที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน ทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างทีละคู่ 10 คู่ ถ้าเราเลือกระดับนัยสำคัญที่ $\alpha = .05$

สำหรับการทดสอบแต่ละครั้ง ซึ่งการทดสอบแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะยอมรับสมมติฐานสูญทั้ง 10 ครั้ง เท่ากับ $(.95)^{10} = .5987$ และความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานสูญอย่างน้อย 1 ครั้งใน 10 ครั้ง เท่ากับ $1 - .5987 = .4013$ ถ้าเราทราบว่าสมมติฐานสูญเป็นจริงสำหรับการทดสอบทั้ง 10 ครั้ง ดังนั้นการปฏิเสธสมมติฐานสูญเป็นการตัดสินใจที่ผิดพลาดประเภท 1 (type I error) การทดสอบทั้ง 10 ครั้ง ทำให้เกิดความผิดพลาดประเภท 1 คิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับ 40 เปอร์เซ็นต์ แต่ในทางปฏิบัติการทดสอบทั้ง 10 ครั้งนั้นไม่เป็นอิสระกันเพราะใช้ข้อมูลชุดเดียวกันในการทดลอง 1 ครั้ง จึงทำให้ต้องหาสถิติทดสอบตัวใหม่เพื่อใช้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างมากกว่า 2 กลุ่มสถิติทดสอบที่เหมาะสมได้แก่ การวิเคราะห์ความแปรปรวน

2. ตัวแปร

ตัวแปร มีอยู่ 3 ชนิด คือ

1. ตัวแปรต้นหรือทรีทเมนต์ พิจารณาจากตัวอย่างคือ ยาซึ่งมี 3 ระดับได้แก่ ยา A ยา B และยา C เป็นตัวแปรที่เราสนใจอิทธิพลของมันต่อตัวแปรตามในการทดลอง เราต้องการหาคำตอบว่า ผลของตัวแปรต้นหรือทรีทเมนต์มีความแตกต่างกันหรือไม่

2. ตัวแปรตาม (response variable) พิจารณาจากตัวอย่างคือระดับคอเลสเตอรอล ซึ่งมีค่าที่แตกต่างกันเมื่อให้ทรีทเมนต์แตกต่างกัน

3. ตัวแปรรบกวน (extraneous variables) ตัวแปรเหล่านี้อาจมีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม แต่ไม่ใช่ตัวแปรที่เราสนใจอิทธิพลของมันในการทดลอง

3. วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน

วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนที่ใช้ในแผนการทดลองแบบต่าง ๆ มี 9 ขั้นตอน คือ

1. สร้างตารางข้อมูล เพื่ออธิบายลักษณะของข้อมูล

2. เขียนตัวแบบสถิติแสดงการออกแบบการทดลองเป็นรูปสัญลักษณ์แสดงอิทธิพลของตัวแปรจากข้อมูลเพื่อใช้ในการวิเคราะห์

3. ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

4. ทดสอบสมมติฐานทางสถิติ โดยใช้สถิติทดสอบ

5. พิจารณาการกระจายของสถิติทดสอบ

6. การตัดสินใจในการยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานทางสถิติ โดยกำหนดระดับนัยสำคัญ

7. คำนวณค่าสถิติทดสอบ โดยสรุปผลการคำนวณลงในตาราง เรียกว่า ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ทำให้การสรุปผลการวิเคราะห์ดูง่าย

8. ติดสินใจว่ายอมรับ หรือปฏิเสธสมมติฐานสูญ
9. สรุปผล

4. การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว คือมีแหล่งของความแปรปรวนแหล่งเดียว หรือมีปัจจัยเดียวที่สนใจ เราใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลของทรีทเมนต์ 3 ทรีทเมนต์หรือมากกว่าว่าเหมือนกันหรือแตกต่างกัน โดยให้ทรีทเมนต์ต่าง ๆ แก่หน่วยทดลองโดยสุ่มแล้ววัดอิทธิพลของทรีทเมนต์ต่าง ๆ นั้น เรียกการออกแบบการทดลองนี้ว่า การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

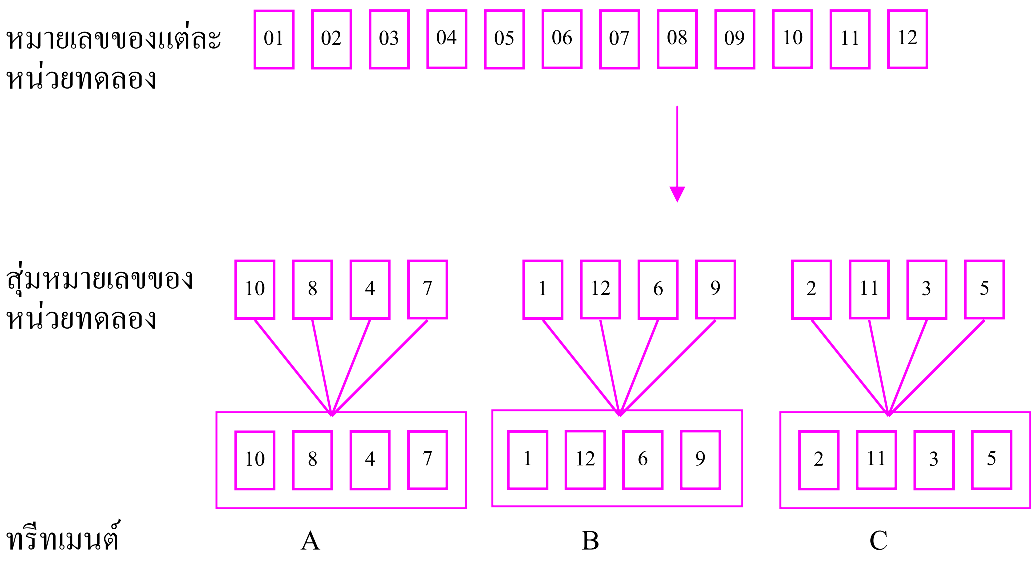
วิธีสุ่มเราอาจใช้การสุ่มหน่วยทดลองให้แก่ทรีทเมนต์ก็ได้ สมมุติว่ามีหน่วยทดลอง 12 หน่วย ในการทดลองต้องการเปรียบเทียบยา 3 ชนิด วิธีการสุ่ม ทำโดยให้หมายเลขหน่วยทดลองจาก 01 ถึง 12 ใช้ตารางสุ่มหรือการจับฉลาก สุ่มเลขมาทีละครั้งไม่ซ้ำกันตั้งแต่ 1 ถึง 12 ได้เลข 10, 8, 4, 7, 1, 12, 6, 9, 2, 11, 3 และ 5 ตามลำดับ

ให้หน่วยทดลองหมายเลข 10, 8, 4 และ 7 ได้รับยา A

ให้หน่วยทดลองหมายเลข 1, 12, 6 และ 9 ได้รับยา B

ให้หน่วยทดลองหมายเลข 2, 11, 3 และ 5 ได้รับยา C

การออกแบบการทดลองแสดงได้ดังภาพ



ภาพ 1 การจัดหน่วยทดลองให้แก่ทรีทเมนต์ สำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

4.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์ความแปรปรวน

4.1.1 สร้างตารางข้อมูล ได้จากการวัดค่าสังเกตในการทดลองที่ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ดังตาราง

ตาราง 1.1 รูปแบบข้อมูลสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

	ทรีทเมนต์					
	1	2	3	...	a	
	y_{11}	y_{21}	y_{31}	...	y_{a1}	
	y_{12}	y_{22}	y_{32}	...	y_{a2}	
	y_{13}	y_{23}	y_{33}	...	y_{a3}	
	$\vdots$					
	y_{1n_1}	y_{2n_2}	y_{3n_3}	...	y_{an_a}	
ผลรวม	$y_{1\cdot}$	$y_{2\cdot}$	$y_{3\cdot}$		$y_{a\cdot}$	$y_{\cdot\cdot}$
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_{1\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot}$		$\bar{y}_{a\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

เมื่อ y_{ij} คือ ค่าสังเกตที่เป็นผลจากทรีทเมนต์ที่ i ตัวที่ i

$i = 1, 2, \ldots, a$; $j = 1, 2, \ldots, n_i$

n_i คือ จำนวนหน่วยทดลองในทรีทเมนต์ที่ i

ผลรวมทั้งหมดของทรีทเมนต์ที่ i คือ $y_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{n_i} y_{ij}$

ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ i คือ $\bar{y}_{i\cdot} = \dfrac{y_{i\cdot}}{n_i}$

ผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมด คือ $y_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$

ค่าเฉลี่ยทั้งหมดคือ $\bar{y}_{\cdot\cdot} = \dfrac{y_{\cdot\cdot}}{N}$

จำนวนหน่วยทดลองทั้งหมดคือ $N = \sum_{i=1}^{a} n_i$

4.1.2 เขียนตัวแบบสถิติแสดงการออกแบบการทดลองเป็นรูปสัญลักษณ์

ตัวแบบสถิติคือ

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \;;\; j = 1, 2, \ldots, n_i$$

เมื่อ y_{ij} คือ ค่าสังเกตที่เป็นผลจากทรีทเมนต์ที่ i ตัวที่ j

μ_i คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม i

e_{ij} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (random error) ของการทดลอง

ความคลาดเคลื่อนของการทดลองหาได้จาก

$$e_{ij} = y_{ij} - \mu_i$$

เมื่อ e_{ij} คือ ความแปรปรวนภายนอกที่มีอิทธิพลต่อสมาชิกใด ๆ ของประชากร

ค่าเฉลี่ยทั้งหมด (grand mean) หาได้จาก

$$\mu = \frac{\sum \mu_i}{a}$$

เมื่อ μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมดของทุกกลุ่มทรีทเมนต์

อิทธิพลของทรีทเมนต์หาได้จาก

$$\tau_i = \mu_i - \mu$$

เมื่อ τ_i คือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ i ซึ่งเป็นค่าแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ i กับค่าเฉลี่ยทั้งหมด

จะได้

$$\mu_i = \mu + \tau_i$$

ทำให้เขียนตัวแบบสถิติได้ใหม่คือ

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \;;\; j = 1, 2, \ldots, n_i$$

โดยทั่วไปเรามักจะสนใจ เฉพาะทรีทเมนต์ a ทรีทเมนต์ซึ่งเป็นทรีทเมนต์ในการทดลองเท่านั้น และการสรุปผลการทดลองเรามักจะอ้างอิงเฉพาะทรีทเมนต์เหล่านี้เท่านั้น ไม่ได้อ้างอิงไปสู่ทรีทเมนต์อื่น ๆ ที่ไม่ได้ทำในการทดลอง เราเรียกตัวแบบสถิตินี้ว่าตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบกำหนด (fixed-effects model) ซึ่งในบทนี้จะมีขอบเขตเฉพาะตัวแบบนี้เท่านั้น

ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

ข้อตกลงเบื้องต้นลำหรับตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบกำหนดคือ

1. กลุ่มตัวอย่าง a กลุ่ม ได้มาจากการสุ่มและเป็นอิสระกัน
2. ประชากรแต่ละกลุ่ม มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_i และความแปรปรวน σ_i^2
3. ประชากรแต่ละกลุ่มมีความแปรปรวนเท่ากัน คือ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_a^2 = \sigma^2$
4. τ_i คือค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า และ $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$
5. e_{ij} มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 มีความเป็นอิสระและมีการแจกแจงแบบปกติ

4.1.3 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติมี 2 แบบคือ สมมติฐานสูญ และสมมติฐานแย้ง สำหรับสมมติฐานสูญเราต้องการทดสอบเกี่ยวกับความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์หรือประชากร สมมติฐานแย้ง คือมีค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์อย่างน้อย 1 คู่ที่แตกต่างกัน เราสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$

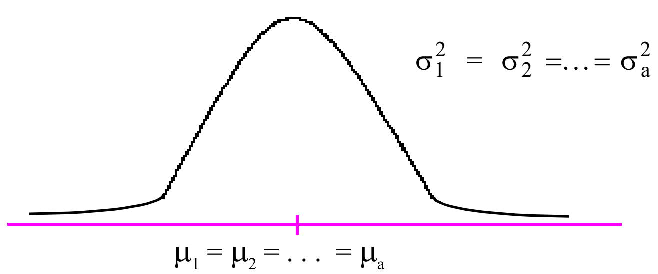
H_1 : $\mu_i \neq \mu_j$ อย่างน้อย 1 คู่ เมื่อ $i \neq j$

ถ้าค่าเฉลี่ยของประชากรต่าง ๆ เท่ากัน นั่นคืออิทธิพลของแต่ละทรีทเมนต์เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสามารถเขียนสมมติฐานได้อีกแบบหนึ่งคือ

H_0 : $\tau_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, a$

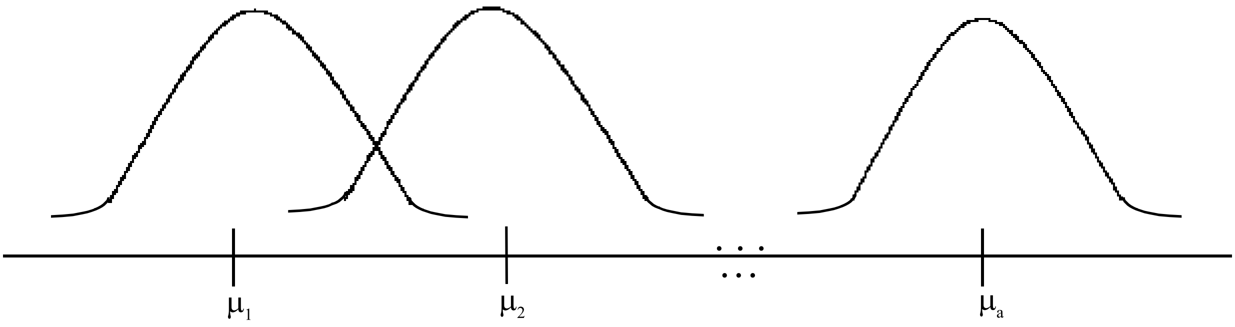
H_1 : $\tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

ถ้า H_0 เป็นจริง และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความเท่ากันของความแปรปรวนและการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติจะ แสดงได้ดังภาพ



ภาพ 2 แสดงประชากรสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ เมื่อ H_0 จริง และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

ถ้า H_0 ไม่จริง คือค่าเฉลี่ยของประชากรต่าง ๆ แตกต่างกันหมด และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ จะแสดงได้ดังภาพ



ภาพ 3 แสดงประชากรสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ เมื่อ H_0 ไม่จริงและเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

4.1.4 สถิติทดสอบ

สถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบสมมติฐานทางสถิติ สำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียวใช้การคำนวณอัตราส่วนของความแปรปรวน (Variance Ratio : V.R.)

4.1.5 การแจกแจงของสถิติทดสอบ

การแจกแจงของอัตราส่วนของความแปรปรวน มีการแจกแจงแบบ F เมื่อ H_0 เป็นจริงและเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

4.1.6 เลือกระดับนัยสำคัญ α

เพื่อใช้เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ถ้าค่าที่คำนวณได้จากอัตราส่วนของความแปรปรวนมากกว่าค่าวิกฤติของ F ที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนด

4.1.7 คำนวณสถิติทดสอบ

ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูล แบ่งความแปรปรวนของข้อมูลออกเป็นแหล่งต่าง ๆ เทอมของความแปรปรวนที่ใช้คือ ผลบวกกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนของค่าสังเกตต่าง ๆ จากค่าเฉลี่ย (sum of squared deviations of observations from their mean)

4.1.8 การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

การตัดสินใจว่าสมมติฐานสูญเกี่ยวกับความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของประชากรทุกประชากร เป็นจริงหรือไม่ ต้องทำการเปรียบเทียบอัตราส่วนของความแปรปรวนกับค่าวิกฤตของ F ซึ่งได้จากการเปิดตาราง F ที่จำนวนชั้นอิสระ (a - 1) , (N - a) ถ้าอัตราส่วนของความแปรปรวนที่คำนวณได้มากกว่าค่าวิกฤติของ F เราจะปฏิเสธสมมติฐานสูญ แต่ถ้าอัตราส่วนของความแปรปรวนที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าวิกฤติของ F เราจะไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานสูญ

4.1.9 สรุปผลการทดสอบ

ถ้าตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐานสูญจะสรุปว่า ค่าเฉลี่ยของประชากรแต่ละประชากรไม่เท่ากันอย่างน้อย 1 ประชากร แต่ถ้าการตัดสินใจไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานสูญจะสรุปว่าค่าเฉลี่ยของทุกประชากรเท่ากัน

4.2 การคำนวณผลบวกกำลังสอง

การคำนวณผลบวกกำลังสองของการเบี่ยงเบนของค่าสังเกตแต่ละตัวจากค่าเฉลี่ยทั้งหมดคือ

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

เมื่อ a คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่างหรือทรีทเมนต์

n_i คือ จำนวนหน่วยทดลองในกลุ่มที่ i

สามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ดังนี้

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

เราสามารถแบ่งผลบวกกำลังสองทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ ตามแหล่งของความแปรปรวนทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
SST &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet} + \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right) + \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right) = 0$

ดังนั้น
$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

ถ้าจำนวนค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มเท่ากัน จะได้ว่า
$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 + n\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

เมื่อ $n_1 = n_2 = \dots = n_a = n$

เขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ
$$SST = SSA + SSW$$

SSA คือ ผลบวกกำลังสองระหว่างกลุ่มย่อมาจาก sum of square among group ส่วนใหญ่มักนิยมเรียกว่าผลบวกกำลังสองเนื่องจากทรีทเมนต์หรือ SSTr ย่อมาจาก sum of square due to treatment เป็นความเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด และคูณด้วยขนาดของกลุ่ม

$$SSA = \sum_{i=1}^{a} n_i\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\bullet}^2}{n_i} - \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

SSW คือ ผลบวกกำลังสองภายในกลุ่มย่อมาจาก sum of square within group เป็นความเบี่ยงเบนภายในกลุ่ม ซึ่งค่าสังเกตแต่ละตัวภายในกลุ่มเบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ส่วนใหญ่มักนิยมเรียกว่า ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนหรือ SSE ย่อมาจาก sum of square due to error

$$SSW = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a} n_i \frac{\left(y_{i\bullet}\right)^2}{n_i^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a} \frac{\left(y_{i\bullet}\right)^2}{n_i}$$

4.3 การประมาณค่า σ^2

4.3.1 การประมาณ σ^2 วิธีที่ 1

จากตัวอย่างกลุ่มหนึ่ง ประมาณความแปรปรวนของประชากรได้ดังนี้

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}\right)^2}{n_i - 1}$$

จะได้ค่าประมาณที่ไม่เอนเอียงของความแปรปรวนของประชากรภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่าความแปรปรวนของทุกประชากรเท่ากันเท่ากับ σ^2 เราสามารถประมาณความแปรปรวนของประชากรทุกกลุ่มได้ คือ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}\right)^2}{\sum_{i=1}^{a} \left(n_i - 1\right)}$$

เรียกว่า ความแปรปรวนภายในกลุ่ม ซึ่งมาจากผลบวกกำลังสองภายในกลุ่มหารด้วยจำนวนชั้นอิสระ แต่โดยทั่วไปนิยมเรียกว่าค่าเฉลี่ยกำลังสองภายในกลุ่ม (within groups mean square) มากกว่าเรียกว่าความ แปรปรวนภายในกลุ่มซึ่งเป็นค่าประมาณของ σ^2

4.3.2 การประมาณ σ^2 วิธีที่ 2

จากสูตร $$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

เมื่อ $\sigma_{\bar{y}}^2$ คือ ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกลุ่มต่าง ๆ

$$\sigma^2 = n\sigma_{\bar{y}}^2$$

จากสูตร $$\hat{\sigma}_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a} \left(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2}{a - 1}$$

เนื่องจาก $\hat{\sigma}_{\bar{y}}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของ $\sigma_{\bar{y}}^2$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{a} \left(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2}{a - 1}$$

ซึ่งก็คือ ผลบวกกำลังสองระหว่างกลุ่ม เมื่อทุกกลุ่มมีจำนวนค่าสังเกตเท่ากันหารด้วยจำนวนชั้นอิสระ โดยทั่วไปเรียกว่า ค่าเฉลี่ยกำลังสองระหว่างกลุ่ม (among groups mean square)

ถ้าสมมติฐานสูญเป็นจริง การประมาณค่า σ^2 ทั้ง 2 วิธี ต้องได้ค่าเท่ากัน แต่ถ้าสมมติฐานสูญไม่จริงนั่นคือ ค่าเฉลี่ยของแต่ละประชากรไม่เท่ากัน ซึ่งจะทำให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองระหว่างกลุ่มมากกว่าค่าเฉลี่ยกำลังสองภายในกลุ่ม

4.4 การคำนวณอัตราส่วนของความแปรปรวน (Variance Ratio)

การเปรียบเทียบค่าประมาณของความแปรปรวนที่ได้จาก 2 วิธีข้างต้น

$$\text{V.R.} = \frac{\text{among group mean square}}{\text{within group mean square}}$$

$$= \frac{\text{MSA}}{\text{MSW}} \text{ หรือ } \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}}$$

ถ้า V.R. เข้าใกล้ 1 มีแนวโน้มว่าจะสนับสนุนสมมติฐานสูญเกี่ยวกับความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของประชากรทุกกลุ่ม แต่ถ้า mean square ระหว่างกลุ่มมากกว่า mean square ภายในกลุ่มจะทำให้ V.R. มากกว่า 1 ก็จะทำให้เกิดข้อสงสัยหรือไม่แน่ใจเกี่ยวกับสมมติฐานสูญ ทำให้เกิดข้อคำถามว่าต้องมากกว่าเท่าไรจึงจะสรุปได้ว่า ค่าประมาณ σ^2 ทั้ง 2 วิธี แตกต่างกันจริง ๆ ไม่ใช่ความบังเอิญ

สถิติทดสอบ F ช่วยตอบคำถามข้างต้นได้ เราต้องพิจารณาการแจกแจงของตัวอย่างของอัตราส่วนของความแปรปรวน 2 ค่านี้

เนื่องจากการแจกแจงของ F คือ

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$$

เมื่อกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างได้มาโดยการสุ่ม และ ทั้ง 2 กลุ่มมีความเป็นอิสระกัน และเมื่อความแปรปรวนของประชากรทั้ง 2 ประชากรเท่ากันคือ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ จะได้ว่า

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

ซึ่งมีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ $(a - 1)$, $(N - a)$

4.5 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

การคำนวณผลบวกกำลังสองของแหล่งความแปรปรวนแหล่งต่าง ๆ mean square และอัตราส่วนของความแปรปรวน สรุปอยู่ในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 1.2 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	Variance Ratio
ระหว่างกลุ่ม	$SSTr = \sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$a-1$	$MSA = \dfrac{SSA}{a-1}$	$V.R. = \dfrac{MSA}{MSW}$
	$= \sum_{i=1}^{a} \dfrac{y_{i\bullet}^2}{n_i} - \dfrac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$			
ภายในกลุ่ม	$SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$	$N-a$	$MSW = \dfrac{SSW}{N-a}$	
	$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a} \dfrac{(y_{i\bullet})^2}{n_i}$			
Total	$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$N-1$		
	$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \dfrac{y_{\bullet\bullet}^2}{N}$			

ตัวอย่างที่ 1 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ศึกษาจากการทดลองของ Miller และ Venhoutte มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบฮอร์โมนเอสโตรเจน โปรเจสเตอโรน เอสโตรเจน และโปรเจสเตอโรน กับคอนโทรลคือไม่ให้ฮอร์โมน ดำเนินการทดลองกับสุนัข ตัวแปรตามคือ ความเข้มข้นของโปรเจสเตอโรนในซีรัมของสัตว์ภายหลังจากได้รับทรีทเมนต์ 14 ถึง 21 วัน การทดลองนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบอิทธิพลของฮอร์โมนเอส-โตรเจน โปรเจสเตอโรน ที่มีต่อความเข้มข้นของโปรเจสเตอโรนในซีรัมของสัตว์

วิธีทำ

1. สร้างตารางข้อมูล

ทรีทเมนต์คือ ฮอร์โมน 4 ระดับได้แก่ ไม่ให้ฮอร์โมน, เอสโตรเจน, โปรเจสเตอโรน และเอสโตรเจน + โปรเจสเตอโรน

ค่าสังเกต คือ ความเข้มข้นของโปรเจสเตอโรนในซีรัม (ng/dl)

ตาราง 1.3 ความเข้มข้นของโปรเจสเตอโรนในซีรัม (ng/dl) ในสุนัขที่ไม่ได้รับฮอร์โมน, ได้รับเอสโตรเจน, โปรเจสเตอโรน, และเอสโตรเจน + โปรเจสเตอโรน

	ทรีทเมนต์				
	ไม่ได้รับฮอร์โมน	เอสโตรเจน	โปรเจสเตอโรน	เอสโตรเจน + โปรเจสเตอโรน	
	117	440	605	2664	
	124	264	626	2078	
	40	221	385	3584	
	88	136	475	1540	
	40			1840	
ผลรวม	409	1061	2091	11706	15267
ค่าเฉลี่ย	81.80	265.25	522.75	2341.20	848.1667

แหล่งที่มา : Virginia M. Miller, Ph.D.

2. ข้อตกลงเบื้องต้น

สมมติว่าตัวอย่างทั้ง 4 กลุ่มได้มาโดยการสุ่มอย่างง่ายจากประชากร 4 ประชากรที่เหมือนกัน ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ มีความแปรปรวนเท่ากัน และเป็นอิสระกัน

3. สมมติฐานทางสถิติ

$H_O : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1 : มีอย่างน้อย 1 ค่าที่ไม่เท่ากับค่าอื่น ๆ

4. สถิติทดสอบคือ

$$V.R. = \frac{MSTr}{MSE}$$

หรือ

$$F_0 = \frac{MSTr}{MSE}$$

5. การแจกแจงของสถิติทดสอบ

ถ้า H_0 เป็นจริง และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติทำให้อัตราส่วนของความแปรปรวนมีการแจกแจงแบบ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระ (4 - 1) , (18 - 4) คือ 3, 14

6. กฎการตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

ถ้ากำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ ค่าวิกฤติของ F ที่จำนวนชั้นอิสระ 3, 14 จาก ตาราง F เท่ากับ 3.34 เราจะปฏิเสธ H_O ถ้าค่า V.R. ที่คำนวณได้มากกว่าหรือเท่ากับ 3.34

7. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

โดยคำนวณผลบวกกำลังสองแยกตามแหล่งของความแปรปรวนดังนี้

$$\begin{aligned}
SST &= (117)^2 + (124)^2 + \ldots + (1840)^2 - (15267)^2 / 18 \\
&= 31519629 - 12948960.5 \\
&= 18570668.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SSTr &= \frac{(409)^2}{5} + \frac{1061^2}{4} + \frac{2091^2}{4} + \frac{11706^2}{5} - \frac{15267^2}{18} \\
&= 28814043.9 - 12948960.5 \\
&= 15865083.4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SSE &= SST - SSA \\
&= 18570668.5 - 15865083.4 \\
&= 2705585.1
\end{aligned}$$

ตาราง 1.4 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับตัวอย่างที่ 1

Source of Variation	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	F_O
ระหว่างกลุ่ม (Treatment)	15865083.4	3	5288361.133 $= \sigma^2 + n\sum\tau_i^2 / (a-1)$	27.3645
ภายในกลุ่ม (Error)	2705585.1	14	193256.0786 $= \sigma^2$	
Total	18570668.5	17		

8. การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

เปรียบเทียบ F_0 ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤติ F ที่เปิดได้จากตาราง $F_{.05,3,14}$ เท่ากับ 3.34 ค่า F_0 ที่คำนวณได้มากกว่าค่า F จากตารางจึงตัดสินใจปฏิเสธ H_0

9. สรุปผลการทดสอบ

เนื่องจากปฏิเสธ H_O จึงสรุปผลว่า สมมติฐานแย้งเป็นจริง นั่นคือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ต่าง ๆ ไม่เหมือนกันทั้งหมด

5. การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทุกประชากรเป็นรายคู่ (Multiple Compasison Procedure)

หลังจากการวิเคราะห์ความแปรปรวน ถ้าสรุปผลว่าปฏิเสธสมมติฐานสูญคือ ค่าเฉลี่ยของบางประชากรแตกต่างไปจากประชากรอื่น ๆ แต่ไม่ทราบว่าค่าเฉลี่ยของประชากรใดที่แตกต่างไป มีวิธีการทดสอบหลายวิธีซึ่งใช้กันมาก เช่น วิธีของฟิชเชอร์ (Fisher's least significant difference: LSD) วิธีของดันแคน (Duncan's multiple range test) วิธีของดันเนท (Dunnet's test) วิธีของตูกี (Tukey) วิธีของเชฟเฟ (Scheffe′)

สำหรับตัวอย่างการวิเคราะห์ความแปรปรวนข้างต้นใช้วิธีตูกี ในการทดสอบสมมติฐานสูญเกี่ยวกับความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์เป็นรายคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นวิธีที่ใช้กันมาก การทดสอบต้องเลือกระดับนัยสำคัญ α โดยทั่วไปเรียกวิธีตูกี ว่า วิธี HSD (honestly significant difference) การทดสอบจะหาค่าค่าหนึ่งเป็นตัวเปรียบเทียบกับความแตกต่างของทรีทเมนต์เป็นรายคู่ทุกคู่ ค่านี้เรียกว่า HSD กรณีที่ทุกทรีทเมนต์มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากันทุกทรีทเมนต์ HSD หาได้ดังนี้

$$\text{HSD} = q_{\alpha,a,N-a}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$$

เมื่อ α = ระดับนัยสำคัญ

a = จำนวนทรีทเมนต์ในการทดลอง

N = จำนวนค่าสังเกตทั้งหมดในการทดลอง

n = จำนวนค่าสังเกตในแต่ละทรีทเมนต์

MSE = mean square error หรือ within mean square ที่ได้จากตาราง ANOVA

q = เปิดจากตาราง H ที่ α, a, และ $N - a$

คำนวณหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ที่เป็นไปได้เป็นค่าสัมบูรณ์ นำค่าที่คำนวณได้มาเปรียบเทียบกับ HSD ถ้าค่าที่คำนวณมากกว่า HSD จะปฏิเสธสมมติฐานสูญ

สำหรับกรณีที่ตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีจำนวนไม่เท่ากัน การคำนวณหา HSD หาได้ดังนี้

$$HSD^* = q_{\alpha,a,N-a}\sqrt{\frac{MSE}{n_i^*}}$$

ค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง 2 กลุ่ม โดยที่ n_j* คือ จำนวนของกลุ่มตัวอย่างที่เล็กกว่าอีกกลุ่มหนึ่ง เปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับ HSD* ถ้าค่าที่คำนวณมากกว่า HSD จะปฏิเสธสมมติฐานสูญ

ตัวอย่างที่ 2 จากตัวอย่างที่ผ่านมาข้างต้น หลังจากปฏิเสธสมมติฐานสูญเกี่ยวกับความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของทุกประชากรแล้ว ใช้วิธีตูกี ทดสอบสมมติฐานสูญเกี่ยวกับความเท่ากันของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์เป็นรายคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ

1. กำหนดให้ $\alpha = .05$

หาค่า q จากการเปิดตาราง Percentage Points of the Studentized Range เมื่อ $a = 4$, $N - a = 14$ ได้ $q = 4.11$

MSE ได้จากตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน $MSE = 193256.0786$

2. คำนวณหาค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ที่เป็นไปได้ ดังแสดงในตาราง

ตาราง 1.5 ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ที่เป็นไปได้

	Untreated	Estrogen	Progesterone	Estrogen + Progesterone
Untreated (u)	–	183.45	440.95	2259.40
Estrogen (e)	–	–	257.50	2075.95
Progesterone (p)	–	–	–	1818.45
Estrogen & Progesterone (pe)	–	–	–	–

3. คำนวณหา HSD*

4. เปรียบเทียบค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์แต่ละคู่กับ HSD* เพื่อทดสอบสมมติฐานสูญ สรุปผลการทดสอบได้ดังนี้

สมมติฐานสูญ	HSD*	การตัดสินใจ
$H_0 : \mu_u = \mu_e$	$HSD^* = 4.11\sqrt{\frac{193256.0786}{4}} = 903.40$	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 183.45 < 903.40
$H_0 : \mu_u = \mu_p$	$HSD^* = 4.11\sqrt{\frac{193256.0786}{4}} = 903.40$	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 440.95 < 903.40
$H_0 : \mu_u = \mu_{pe}$	$HSD^* = 4.11\sqrt{\frac{193256.0786}{5}} = 808.02$	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 2259.4 > 808.02
$H_0 : \mu_e = \mu_p$	$HSD^* = 4.11\sqrt{\frac{193256.0786}{4}} = 903.40$	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 257.5 < 903.40
$H_0 : \mu_e = \mu_{pe}$	$HSD^* = 4.11\sqrt{\frac{193256.0786}{4}} = 903.40$	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 2075.95 > 903.40
$H_0 : \mu_p = \mu_{pe}$	$HSD^* = 4.11\sqrt{\frac{193256.0786}{4}} = 903.40$	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 1818.5 > 903.40

6. การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทางสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

การบล็อกเป็นการจัดหน่วยทดลองที่เหมือนกันไว้ในกลุ่มเดียวกันและระหว่างกลุ่มมีความแตกต่างกัน การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกใช้เมื่อสามารถจัดหน่วยทดลองที่เหมีนกันอยู่ในบล็อกเดียวกันและจำนวนหน่วยทดลองในแต่ละบล็อกเท่ากับจำนวนของทรีทเมนต์ นั่นคือแต่ละหน่วยทดลองในบล็อกจะได้รับทรีทเมนต์ใดทรีทเมนต์หนึ่งเท่านั้นโดยสุ่ม

เทคนิควิธีวิเคราะห์ข้อมูลที่มาจากการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก คือ วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสองทาง (two - way analysis of variance) มีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังนี้

6.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์ความแปรปรวน

6.1.1 สร้างตารางข้อมูล ระบุทรีทเมนต์ บล็อก หน่วยทดลอง ข้อมูลหรือค่าสังเกต แสดงเป็นตารางต่อไปนี้

ตาราง 1.6 รูปแบบข้อมูลสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

	ทรีทเมนต์					ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
บล็อก	1	2	3	. . .	k		
1	y_{11}	y_{22}	y_{31}	. . .	y_{a1}	$y_{\bullet 1}$	$\bar{y}_{\bullet 1}$
2	y_{21}	y_{22}	y_{32}	. . .	y_{a2}	$y_{\bullet 2}$	$\bar{y}_{\bullet 2}$
3	y_{31}	y_{23}	y_{33}	. . .	y_{a3}	$y_{\bullet 3}$	$\bar{y}_{\bullet 3}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
n	y_{1b}	y_{2b}	y_{3b}	. . .	y_{ab}	$y_{\bullet b}$	$\bar{y}_{\bullet b}$
ผลรวม	$y_{1\bullet}$	$y_{2\bullet}$	$y_{3\bullet}$	. . .	$y_{a\bullet}$	$y_{\bullet\bullet}$	
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_{1\bullet}$	$\bar{y}_{2\bullet}$	$\bar{y}_{3\bullet}$	. . .	$\bar{y}_{a\bullet}$		$\bar{y}_{\bullet\bullet}$

6.1.2 เขียนตัวแบบสถิติแสดงการออกแบบการทดลองเป็นรูปสัญลักษณ์

ตัวแบบสถิติ คือ

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \;;\quad j = 1, 2, \ldots, b$$

เมื่อ

y_{ij} คือ ค่าสังเกตที่ได้รับทรีทเมนต์ i และอยู่ในบล็อกที่ j

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

τ_i คือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ i

β_j คือ อิทธิพลของบล็อกที่ j

e_{ij} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่งเกิดจากแหล่งของความแปรปรวนอื่น ๆ นอกเหนือจากทรีทเมนต์และบล็อก

ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติคือ

1. y_{ij} แต่ละตัวได้มาโดยการสุ่มและเป็นอิสระกัน

2. ประชากร ab ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_{ij} และความแปรปรวนเท่ากันทุกประชากรเท่ากับ σ^2 ทำให้ e_{ij} มีความเป็นอิสระมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

3. ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างบล็อก และทรีทเมนต์ ทำให้

$$\sum_{i=1}^{a}\tau_j = \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$$

ตัวแบบสถิติที่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นนี้เรียกว่า ตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบกำหนด

6.1.3 สมมติฐานทางสถิติ

$$H_O : \tau_i = 0 \;;\; VS \quad H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ อย่างน้อย 1 ตัว}$$

เราจะไม่ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับบล็อกเพราะเราไม่สนใจอิทธิพลของบล็อกต่อผลการทดลองเนื่องจากบล็อกเป็นแต่เพียงแหล่งของความแปรปรวนจากตัวแปรรบกวน และบล็อกไม่ได้มาโดยการสุ่ม

6.14 สถิติทดสอบ

สถิติทดสอบคือ อัตราส่วนของความแปรปรวน (V.R.)

6.1.5 การแจกแจงของสถิติทดสอบ

ถ้า H_0 เป็นจริง และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ จะทำให้อัตราส่วนของความแปรปรวนมีการแจกแจงแบบ F

6.1.6 การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

ถ้าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติของ F ที่เปิดจากตารางจะตัดสินใจปฏิเสธ H_0

6.1.7 คำนวณค่าสถิติทดสอบ

โดยคำนวณผลบวกกำลังสองตามแหล่งของความแปรปรวนต่าง ๆ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\overbrace{\left(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2}^{\text{ความเบี่ยงเบนของค่าสังเกตจากค่าเฉลี่ย}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\underbrace{\left(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2}_{\text{ความเบี่ยงเบนเนื่องจากทรีทเมนต์}} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\underbrace{\left(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2}_{\text{ความเบี่ยงเบนเนื่องจากบล็อก}} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\overbrace{\left(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2}^{\text{ความคลาดเคลื่อนของการทดลอง}}$$

เขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ

$$SST = SSTr + SSB + SSE$$

สูตรการคำนวณผลบวกกำลังสองตามแหล่งของความแปรปรวนต่าง ๆ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - CT$$

$$SSTr = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\bullet}^2}{b} - CT$$

$$SSB = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{\bullet j}^2}{a} - CT$$

$$SSE = SST - SSTr - SSB$$

เมื่อ CT คือ corrected term

$$CT = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}\right)^2}{ab} = \frac{y_{\bullet\bullet}^2}{ab}$$

จำนวนชั้นอิสระของแหล่งความแปรปรวนต่าง ๆ คือ

$$ab - 1 = (a-1) + b-1) + (a-1)(b-1)$$

สรุปตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 1.7 วิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

Source of Variation	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	F_O
ทรีทเมนต์	SSTr	$(a-1)$	$MSTr = \sigma^2 + b\sum_i^a \tau_i^2 \;/\; (a-1)$	$\frac{MSTr}{MSE}$
บล็อก	SSB	$(b-1)$	$MSB = \sigma^2 + a\sum_j^b \beta_j^2 \;/\; (b-1)$	
Error	SSE	$(a-1)(b-1)$	$MSE = \sigma^2$	
Total	SST	$ab-1$		

6.1.8 การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

โดยเปรียบเทียบ F_O ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตที่เปิดได้จากตาราง $F_{\alpha,(a-1),(a-1)(b-1)}$ ถ้า F_O มากกว่าหรือเท่ากับ $F_{\alpha,(a-1),(a-1)(b-1)}$ จะตัดสินใจปฏิเสธ H_O

6.1.9 สรุปผลการทดสอบ

ถ้าตัดสินใจปฏิเสธ H_O สรุปว่า H_1 จริง และถ้าตัดสินใจไม่ปฏิเสธ H_O สรุปว่า H_O จริง

ตัวอย่างที่ 3 ในการวิจัยทางการแพทย์ ต้องการเปรียบเทียบวิธีการสอนคนไข้ในการใช้เครื่องมือช่วยทางการแพทย์ 3 วิธี คือ วิธี A, B และ C คนไข้ที่ใช้เครื่องมือนี้มีอายุแตกต่างกันซึ่งอายุอาจมีอิทธิพลต่อการเรียนรู้ของคนไข้

การออกแบบการทดลองที่เหมาะสมสำหรับการทดลองนี้ คือ ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก โดยให้อายุคือบล็อก ทรีทเมนต์คือ วิธีการสอน หน่วยทดลองคือ คนไข้ ค่าสังเกตคือระดับการเรียนรู้

วิธีสุ่ม คือ แบ่งคนไข้ออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามอายุ แบ่งออกได้ 5 กลุ่ม แต่ละกลุ่มอายุมีคนไข้ 3 คน สุ่มคนไข้ขึ้นมา 1 คน ให้ได้รับวิธีสอน A สุ่มคนที่ 2 ให้ได้รับวิธีสอน B จนครบทั้ง 3 ทรีทเมนต์ ทำเช่นเดียวกันทุกกลุ่มอายุ แสดงได้ดังภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

อายุ (บล็อก)		วิธีสอน (ทรีทเมนต์)		
	< 20	A	B	C
	20 - 29	B	C	A
	30 - 39	A	C	B
	40 - 49	C	B	A
	≥ 50	B	A	C

ภาพ 4 การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

สุ่มทรีทเมนต์ให้คนไข้ที่มีอายุต่าง ๆ ทำให้เชื่อว่าไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่างทรีทเมนต์และบล็อก และเชื่อว่าความคลาดเคลื่อนของการทดลองเป็นอิสระกันทุกตัวโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

วิธีทำ

1. สร้างตารางข้อมูล

ตาราง 1.8 ข้อมูลการเรียนรู้ของคนไข้ที่ได้รับวิธีการสอนการใช้เครื่องมือช่วยทางการแพทย์ 3 วิธี

บล็อก	วิธีสอน				
อายุ	A	B	C	ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
Under 20	7	9	10	26	8.67
20 to 29	8	9	10	27	9.00
30 to 39	9	9	12	30	10.00
40 to 49	10	9	12	31	10.33
50 and over	11	12	14	37	12.33
ผลรวม	45	48	58	151	
ค่าเฉลี่ย	9.0	9.6	11.6		10.07

แหล่งที่มา : Wayne W.Daniel, Biostatistics

2. ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

สมมติว่าประชากรทั้ง 15 ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างขนาด 1 ที่เป็นตัวแทนของแต่ละประชากรได้มาโดยการสุ่ม และสมมติว่าตัวอย่างมีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

3. สมมติฐานทางสถิติ

$H_0 : \tau_i = 0, \; j = 1, 2, 3$ VS $H_1 : \tau_i > 0$ อย่างน้อย 1 ; $i = 1, 2, 3$

4. สถิติทดสอบ คือ อัตราส่วนของความแปรปรวน (V.R.)

$$\text{V.R.} = \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}} \quad \text{หรือ} \quad F_0 = \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}}$$

5. การแจกแจงของสถิติทดสอบ

ถ้า H_0 เป็นจริงและเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ ทำให้ V.R. มีการแจกแจงแบบ F

6. กฎการตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

ถ้า F_0 ที่คำนวณได้มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติของ F ที่เปิดจากตารางคือ $F_{\alpha,(a-1),(a-1)(b-1)}$ จะตัดสินใจปฏิเสธ H_0

7. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

โดยคำนวณผลบวกกำลังสองดังนี้

$$CT = \frac{(151)^2}{(3)(5)} = \frac{22801}{15} = 1520.0667$$

$$SST = 7^2 + 9^2 + \ldots + 14^2 - 1520.0667$$

$$= 46.9333$$

$$SSTr = \frac{45^2 + 48^2 + 58^2}{5} - 1520.0667$$

$$= 18.5333$$

$$SSB = \frac{26^2 + 27^2 + \ldots + 37^2}{3} - 1520.0667$$

$$= 24.9333$$

$$SSE = 46.9333 - 24.9333 - 18.5333$$

$$= 3.4667$$

ตาราง 1.9 วิเคราะห์ความแปรปรวนของตัวอย่างที่ 3 สำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

Source of Variation	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	F_O
ทรีทเมนต์	18.5333	2	9.26665	21.38
บล็อก	24.9333	4	6.233325	
Error	3.4667	8	0.4333375	
Total	46.9333	14		

8. การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

เปรียบเทียบค่า F_0 ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤติที่เปิดจากตาราง $F_{.05,2,8} = 4.46$ เนื่องจาก F_0 มากกว่า $F_{.05,2,8}$ จึงตัดสินใจปฏิเสธ H_0

9. สรุปผลการทดสอบ

ผลการทดสอบคือ มีอิทธิพลของทรีทเมนต์บางตัวไม่เท่ากับ 0 หรือมีค่าเฉลี่ยของบางทรีทเมนต์ไม่เท่ากับทรีทเมนต์อื่น ๆ

6.2 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์

จากการวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปว่ามีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของวิธีสอน 3 วิธี เราต้องการทราบว่าวิธีใดที่แตกต่างจากวิธีอื่น ๆ

6.2.1 ใช้วิธีของดันแคน (Duncan's multiple range test) มีขั้นตอนดังนี้

1. โดยเรียงลำดับค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ได้จากวิธีการสอนคนไข้ทั้ง 3 วิธีจากน้อยไปมาก

$\bar{y}_{A\bullet} = 9.0$, $\bar{y}_{B\bullet} = 9.6$, $\bar{y}_{C\bullet} = 11.6$

2. หาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์

$$S_{\bar{y}_{i\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{b}} = \sqrt{\frac{0.4333375}{5}} = 0.2944$$

3. หาค่า least significant range (R_p)

เปิดตาราง Duncan's table of significant ranges $\alpha = .05$

$r_{.05,(2,8)} = 3.26$

$r_{.05,(3,8)} = 3.39$

คำนวณหา least significant range คือ

$R_2 = r_{.05,(2,8)} S_{\bar{y}_{i\bullet}} = (3.26)(0.2944) = 0.9597$

$R_3 = r_{.05,(3,8)} S_{\bar{y}_{i\bullet}} = (3.39)(0.2944) = 0.9980$

4. การเปรียบเทียบทรีทเมนต์แต่ละคู่ที่ได้คือ

C VS A = 11.6 – 9.0 = 2.6 > 0.9980

C VS B = 11.6 – 9.6 = 2.0 > 0.9597

B VS A = 9.6 – 9.0 = 0.6 < 0.9597

5. เรียงลำดับค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ได้จากวิธีการสอนคนไข้ทั้ง 3 วิธี จากน้อยไปมาก และขีดเส้นใต้เฉพาะคู่ที่ไม่มีนัยสำคัญ

$$\underline{\bar{y}_{A\bullet} \quad \bar{y}_{B\bullet}} \quad \bar{y}_{C\bullet}$$

6.2.2 การเปรียบเทียบทรีทเมนต์ทั้งหมดทีละคู่ โดยใช้วิธีของฟิชเชอร์ (Least Significant Difference : LSD)

1. สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบ คือ

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \quad \text{สำหรับทุกค่า } i \neq j$$

สำหรับการทดสอบสองทาง จะสรุปว่าค่าเฉลี่ย μ_i และ μ_j แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ถ้า

$$\left| \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet} \right| > t_{\alpha/2,N-a} \sqrt{\frac{2MSE}{b}}$$

2. คำนวณค่า LSD

$$LSD = t_{\alpha/2,N-a} \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

$$= t_{\alpha/2,8} \sqrt{\frac{(2)(.4333375)}{5}}$$

$$= 2.306\ (0.4163) = 0.9601$$

3. คำนวณหาค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ที่เป็นไปได้ ดังตาราง

ตาราง 1.10 ค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ที่เป็นไปได้

	A	B	C
A	–	0.6	2.6
B	–	–	2
C	–	–	–

4. เปรียบเทียบค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์แต่ละคู่กับค่า LSD เพื่อทดสอบสมมติฐานสูญ สรุปผลได้ดังนี้

สมมติฐานสูญ	LSD	การตัดสินใจ
$H_0 : \mu_A = \mu_B$	0.9601	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 0.6 < 0.9601
$H_0 : \mu_A = \mu_C$	0.9601	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 2.6 > 0.9601
$H_0 : \mu_B = \mu_C$	0.9601	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 2.0 > 0.9601

7. ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

เปรียบเทียบการวิเคราะห์ความแปรปรวนของตัวอย่างที่ 3 ที่ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก และออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ เพื่อคำนวณหาประสิทธิภาพของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกได้ดังนี้

ตาราง 1.9 วิเคราะห์ความแปรปรวนของตัวอย่างที่ 3 สำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

Source of Variation	Sum of Square	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
ทรีทเมนต์	18.5333	2	9.2666	21.38
บล็อก	24.9333	4	6.233325	
Error	3.4667	8	0.433375	
Total	46.9333	14		

ตาราง 1.11 วิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

Source of Variation	Sum of Square	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
ทรีทเมนต์	18.5333	2	9.26665	3.91548
Error	28.4000	12	2.36667	
Total	46.9333	14		

จากตารางพบว่าประมาณ 88% ของความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (24.93) เป็นผลมาจากความแตกต่างระหว่างบล็อก ดังนั้นถ้าเราออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์แล้ว MSE จะมีค่ามากและไม่สามารถพบอิทธิพลของทรีทเมนต์ได้ดีเท่าการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

ภายในบล็อก จึงมักประมาณประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก เปรียบเทียบกับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์โดยคำนวณประสิทธิภาพสัมพัทธ์ดังนี้

สูตรการหาประสิทธิภาพสัมพัทธ์ คือ

$$R = \frac{(df_b + 1)(df_r + 3)}{(df_b + 3)(df_r + 1)} \cdot \frac{\sigma_r^2}{\sigma_b^2}$$

เมื่อ σ_r^2 คือ ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์หรือ CRD

σ_b^2 คือ ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกหรือ RCBD

df_r คือ df ของ error ของ CRD

df_b คือ df ของ error ของ RCBD

ประมาณ σ_r^2 ได้จาก

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{(n-1)\,MS_{\text{บล็อก}} + n\,(k-1)\,MS_E}{kn-1}$$

$$= \frac{(4)6.23 + 5(2)(0.43)}{(3)(5) - 1}$$

$$= 2.09$$

ดังนั้นประสิทธิภาพสัมพัทธ์คือ

$$R = \frac{(df_b + 1)\,(df_r + 3)}{(df_b + 3)\,(df_r + 1)} \bullet \frac{\hat{\sigma}_r^2}{\hat{\sigma}_b^2}$$

$$= \frac{(8 + 1)(12 + 3)}{(8 + 3)(12 + 1)} \bullet \frac{2.09}{0.43}$$

$$= \frac{(9)(15)}{(11)(13)} \bullet \frac{2.09}{0.43} = 4.58$$

สรุปว่า ถ้าออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ต้องใช้จำนวนซ้ำประมาณ 5 ซ้ำจึงจะมีประสิทธิภาพสามารถพบความแตกต่างของทรีทเมนต์ได้เหมือนกับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกซึ่งมี 5 บล็อก

8. การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

ถ้ามีปัจจัยอื่น 1 ปัจจัย ที่เราไม่สนใจศึกษาแต่รบกวนผลการทดลอง เราเลือกออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกเพื่อลดความคลาดเคลื่อนของการทดลอง โดยแยกความผันแปรเนื่องจากปัจจัยอื่นที่เราไม่สนใจศึกษาแต่รบกวนผลการทดลอง เป็นปัจจัยที่เราทราบและควบคุมได้ ซึ่งมีเพียงปัจจัยเดียวเป็นบล็อก 1 ทาง แต่ถ้ามีปัจจัยที่เข้ามารบกวน 2 ปัจจัย เราจะเลือกออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว โดยจัด 2 ปัจจัยนั้นเป็นบล็อก 2 ทาง

8.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์ความแปรปรวน

8.1.1 สร้างตารางข้อมูล ระบุทรีทเมนต์และบล็อก 2 ทาง

ตัวอย่างที่ 4 สมมติว่าผู้วิจัยต้องการศึกษาอัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงในจรวดของส่วนผสมต่าง ๆ 5 สูตร ผู้วิจัยทราบว่ามีปัจจัยรบกวน 2 ปัจจัย คือ รุ่นของวัตถุดิบ และเจ้าหน้าที่ปฏิบัติงาน เพราะเจ้าหน้าที่แต่ละคนที่ทำส่วนผสมมีความชำนาญและประสบการณ์แตกต่างกัน และวัตถุดิบที่มาคนละรุ่นอาจมีความแตกต่างกัน จึงทำการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

ตาราง 1.12 การออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควของการศึกษาอัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงในจรวด 5 สูตร

รุ่นของวัตถุดิบ	เจ้าหน้าที่ 1	2	3	4	5
1	A = 24	B = 20	C = 19	D = 24	E = 24
2	B = 17	C = 24	D = 30	E = 27	A = 36
3	C = 18	D = 38	E = 26	A = 27	B = 21
4	D = 26	E = 31	A = 26	B = 23	C = 22
5	E = 22	A = 30	B = 20	C = 29	D = 31

แหล่งที่มา : Douglas C. Montgomery, Design and Analysis of Experiments.

แทนทรีทเมนต์ด้วยอักษรลาติน A, B, C, D และ E จึงมีชื่อว่าลาตินสแคว เราจะให้ทั้งแถวและคอลัมน์ออธอกอนอลกับทรีทเมนต์ คือ ทรีทเมนต์หนึ่งจะปรากฏเพียงครั้งเดียวทั้งทางแถวและทางคอลัมน์

เราเลือกการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควในการกำจัดความแปรปรวนของปัจจัยรบกวนที่มี 2 ตัว โดยการบล็อก 2 ทิศทาง ดังนั้นแถวและคอลัมน์ แทนข้อจำกัดของการสุ่ม 2 ทาง คือทำการสุ่มทรีทเมนต์ให้แต่ละแถวและคอลัมน์ปรากฏทรีทเมนต์แต่ละทรีทเมนต์เพียงครั้งเดียวเป็นข้อจำกัดของการสุ่ม

โดยทั่วไปลาตินสแควที่มี p ปัจจัย หรือ $p \times p$ ลาตินสแควจะประกอบด้วย p แถว และ p คอลัมน์ แต่ละสแคว (p^2) จะปรากฏตัวอักษรลาติน p ตัว ซึ่งแทนทรีทเมนต์ต่าง ๆ p ทรีทเมนต์ ตัวอักษรลาตินแต่ละตัวจะปรากฏเพียงครั้งเดียวในแต่ละแถว และแต่ละคอลัมน์

ตัวอย่างของลาตินสแควร

4×4	5×5	6×6
A B D C	A D B E C	A D C E B R
B C A D	D A C B E	B A E C F D
C D B A	C B E D A	C E D F A B
D A C B	B E A C D	D C F B E A
	E C D A B	F B A D C E
		E F B A D C

8.1.2 เขียนตัวแบบสถิติแสดงการออกแบบการทดลองเป็นรูปสัญลักษณ์

ตัวแบบสถิติ คือ

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + e_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p \;;\; j = 1, 2, \ldots p \;;\; k = 1, 2, \ldots, p$$

เมื่อ y_{ijk} คือ ค่าสังเกตในแถวที่ i คอลัมน์ ที่ k สำหรับทรีทเมนต์ j

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

α_i คือ อิทธิพลของแถวที่ i

τ_j คือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ j

β_k คือ อิทธิพลของคอลัมน์ที่ k

e_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนของการทดลองโดยสุ่ม มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ตัวแบบสถิตินี้เป็น completely additive คือ ไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่างแถว คอลัมน์ และทรีทเมนต์

8.1.3 สมมติฐานทางสถิติ

$H_0 : \tau_i = 0$ VS $H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

8.1.4 คำนวณค่าสถิติทดสอบ

สถิติทดสอบ ใช้ทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ คือ

$$F_0 = \frac{\text{MS ทรีทเมนต์}}{\text{MSE}}$$

8.1.5 การแจกแจงของสถิติทดสอบ

ถ้า H_0 เป็นจริงและเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติจะทำให้อัตราส่วนของความแปรปรวนมีการแจกแจง แบบ $F_{\alpha,\ p-1,(p-2),(p-1)}$

8.1.6 การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

โดยเปรียบเทียบ F_0 ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤติที่เปิดจากตาราง $F_{\alpha,\ p-1,(p-2),(p-1)}$ ถ้า F_0 มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติจะตัดสินใจปฏิเสธ H_0

8.1.7 คำนวณค่าสถิติทดสอบ

การวิเคราะห์ความแปรปรวนได้แบ่งผลบวกกำลังสองทั้งหมดของค่าสังเกต $N = p^2$ ตัวออกเป็นส่วน ๆ คือ ผลบวกกำลังสองของแถว คอลัมน์ ทรีทเมนต์ และ ความคลาดเคลื่อนของการทดลองดังนี้

$$\text{SST} = \text{SSแถว} + \text{SSคอลัมน์} + \text{SSทรีทเมนต์} + \text{SSE}$$

ซึ่งมีจำนวนชั้นอิสระสอดคล้องกับผลบวกกำลังสอง แต่ละส่วนดังนี้

$$p^2 - 1 = (p-1) + (p-1) + (p-1) + (p-2)(p-1)$$

สูตรการคำนวณผลบวกกำลังสองตามแหล่งของความแปรปรวนต่าง ๆ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\text{SST} = \sum_{i}^{p}\sum_{j}^{p}\sum_{k}^{p} y_{ijk}^2 - CT$$

$$\text{SSแถว} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i..}^2 - CT$$

$$\text{SSคอลัมน์} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k}^2 - CT$$

$$\text{SSทรีทเมนต์} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{.j.}^2 - CT$$

$$\text{SSE} = \text{SST} - \text{SSทรีทเมนต์} - \text{SSแถว} - \text{SSคอลัมน์}$$

เมื่อ CT คือ corrected term

$$CT = \frac{y_{...}^2}{N}$$

ตาราง 1.13 วิเคราะห์ความแปรปรวนของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

Source of Variation	Degree of Freedom	Sum of Square	Mean Square	F_0
ทรีทเมนต์	$p-1$	$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$\frac{SS_{\text{ทรีทเมนต์}}}{p-1}$	$\frac{MS_{\text{ทรีทเมนต์}}}{MSE}$
แถว	$p-1$	$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$\frac{SS_{\text{แถว}}}{p-1}$	
คอลัมน์	$p-1$	$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$\frac{SS_{\text{คอลัมน์}}}{p-1}$	
Error	$(p-2)(p-1)$	ได้จากการลบ	$\frac{SSE}{(p-2)(p-1)}$	
Total	p^2-1	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$		

$$E(MS_{\text{ทรีทเมนต์}}) = \sigma^2 + p\frac{\sum \tau_i^2}{(p-1)}$$

เนื่องจากแถวและคอลัมน์เป็นตัวแทนของข้อจำกัดของการสุ่ม ดังนั้นการทดสอบอิทธิพลของแถวและคอลัมน์จึงไม่เหมาะสม

8.1.8 การตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

โดยเปรียบเทียบ F_0 ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤติที่เปิดจากตาราง $F_{\alpha,p-1,(p-2)(p-1)}$ ถ้า F_0 มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติจะตัดสินใจปฏิเสธ H_0

8.1.9 สรุปผลการทดสอบ

ถ้าตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐานสูญจะสรุปว่า ค่าเฉลี่ยของประชากรแต่ละประชากรไม่เท่ากันอย่างน้อย 1 ประชากร แต่ถ้าการตัดสินใจไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานจะสรุปว่าค่าเฉลี่ยของทุกประชากรเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 5 เรื่องเชื้อเพลิงจรวดที่มีรุ่นของวัตถุดิบและเจ้าหน้าที่เป็นบล็อกแทนข้อจำกัดของการสุ่ม การออกแบบการทดลองที่เหมาะสมสำหรับการทดลองนี้ คือ ออกแบบการทดลองแบบลาติสแคว โดยใช้เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงานและรุ่นของวัตถุดิบ คือบล็อก 2 ทางทรีทเมนต์ คือ เชื้อเพลิงในจรวด 5 สูตร แทนด้วยตัวอักษรตัวใหญ่คือ A B C D และ E ค่าสังเกตุคืออัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิง

วิธีสุ่ม คือ การออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควที่ให้แถวและคอลัมน์แรกประกอบด้วยตัวอักษรที่เขียนตามลำดับเรียกว่า Standard Latin Square ซึ่งแต่ละสแควสามารถเรียงลำดับตัวอักษรแบบใหม่ได้หลายวิธี วิธีสุ่มดำเนินการโดยสุ่มสแควที่มีการเรียงลำดับอักษรมา 1 แบบ จากจำนวนแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมด

บล็อก

เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงาน

		1	2	3	4	5
บล็อก	1	A	B	C	D	E
รุ่นของ	2	B	C	D	E	A
วัตถุดิบ	3	C	D	E	A	B
	4	D	E	A	B	C
	5	E	A	B	C	D

ภาพที่ 5 การออกแบบการทดลองแบบ 5×5 ลาตินสแคว

วิธีทำ

1. สร้างตารางข้อมูล

สามารถโค้ดข้อมูลเพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้นโดยลบค่าสังเกตทุกตัวด้วย 25 ดังแสดงในตาราง

ตารางที่ 1.14 ข้อมูลที่โค้ดแล้วของอัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงในจรวด 5 สูตร

รุ่นของ	เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงาน					
วัตถุดิบ	1	2	3	4	5	$y_{i\cdot\cdot}$
1	A = −1	B = −5	C = −6	D = −1	E = −1	−14

2	B = −8	C = −1	D = 5	E = 2	A = 11	9
3	C = −7	D = 13	E = 1	A = 2	B = −4	5
4	D = 1	E = 6	A = 1	B = −2	C = −3	3
5	E = −3	A = 5	B = −5	C = 4	D = 6	7
$y_{\cdot\cdot k}$	−18	18	−4	5	9	$y_{\cdot\cdot\cdot}$ = 10

2. ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

สมมติว่าประชากรทั้ง 25 ประชากร มีการแจกแจงแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างขนาด 1 ที่เป็นตัวแทนของแต่ละประชากรได้มาโดยการสุ่ม และสมมติว่าตัวอย่างมีการแจกแจงแบบปกติที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

3. สมมติฐานทางสถิติ

$H_0 : \tau_i = 0$ VS $H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า i = 1, 2, 3, 4, 5

4. สถิติทดสอบคืออัตราส่วนของความแปรปรวน (V.R.)

$$\text{V.R.} = \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}} \quad \text{หรือ} \quad F_0 = \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}}$$

5. การแจกแจงของสถิติทดสอบ

ถ้า H_0 เป็นจริงและเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติทำให้ อัตราส่วนของความแปรปรวนมีการแจกแจงแบบ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระ (p - 1), (p - 2)(p - 1) คือ (5 - 1), (5 - 2)(5 - 1)

6. กฎการตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติ

ถ้า F_0 ที่คำนวณได้มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติของ F ที่เปิดจากตารางคือ $F_{\alpha,p-1,(p-2)(p-1)}$ จะปฏิเสธ H_0

7. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

โดยคำนวณผลบวกกำลังสอง

$$\text{SS}_{\text{สูตรเชื้อเพลิง}} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{\cdot j\cdot}^2 - \frac{y_{\cdot\cdot\cdot}^2}{N}$$

$$= \frac{18^2 + (-24)^2 + (-13)^2 + 24^2 + 5^2}{5} - \frac{(10)^2}{25}$$

$$= 330.00$$

ผลบวกกำลังสองของ ความคลาดเคลื่อนหาได้จาก

$$SSE = SST - SS_{\text{รุ่นวัตถุดิบ}} - SS_{\text{เจ้าหน้าที่}} - SS_{\text{สูตรเชื้อเพลิง}}$$

$$= 676.00 - 68.00 - 150.00 - 330.0$$

$$= 128.00$$

ตาราง 1.15 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองเรื่องเชื้อเพลิงจรวด

Source of Vairation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	Pvalue
สูตรเชื้อเพลิง	330.00	4	82.50	7.73	0.0025
รุ่นของวัตถุดิบ	68.00	4	17.00		
เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงาน	150.00	4	37.50		
Error	128.00	12	10.67		
Total	676.00	24			

ผลการวิเคราะห์สรุปว่าเชื้อเพลิงจรวดทั้ง 5 สูตรมีค่าเฉลี่ยของอัตราการเผาไหม้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และมีหลักฐานแสดงว่ามีความแตกต่างระหว่างเจ้าหน้าที่ปฏิบัติงาน ดังนั้นการบล็อกเจ้าหน้าที่ก็เป็นการควบคุมอิทธิพลของเจ้าหน้าที่ที่อาจมีผลต่อการทดลอง แต่ไม่พบหลักฐานที่แสดงว่ามีความแตกต่างระหว่างรุ่นของวัตถุดิบ ดังนั้นสำหรับการทดลองนี้ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงแหล่งของความแปรปรวนจากรุ่นของวัตถุดิบ อย่างไรก็ตามการบล็อกรุ่นของวัตถุดิบก็เป็นสิ่งที่ควรทำ