บทที่ 2
การทดลองแฟกทอเรียล

1. ปัจจัย

ถ้าการทดลองหนึ่งมีตัวแปรที่เราสนใจมากกว่า 1 ตัวแปร ซึ่งมักจะเรียกตัวแปรที่สนใจในการทดลองว่าปัจจัย (factors) การทดลองที่มีปัจจัยตั้งแต่ 2 ปัจจัยขึ้นไปนี้เรียกว่า การทดลอง แฟกทอเรียล

ปัจจัยแต่ละตัวจะแบ่งออกเป็นหลายระดับ ตัวอย่างเช่น การทดลองหนึ่งต้องการศึกษาอิทธิพลของยาที่มีปริมาณแตกต่างกัน 3 ระดับ ปัจจัยตัวที่สองที่สนใจศึกษาคือ อายุ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ อายุน้อยกว่า 60 ปี และอายุ 60 ปีขึ้นไป ซึ่งโดยทั่วไปจะพูดว่า ปัจจัย A มี a ระดับ ปัจจัย B มี b ระดับ เมื่อมีหลายปัจจัยในการทดลองนอกจากการศึกษาอิทธิพลของปัจจัยแต่ละตัวแล้ว ต้องคำนึงถึงอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัยต่าง ๆ ในการทดลองด้วย

ตัวอย่างที่ 1 ต้องการศึกษาปฏิกิริยาของยาชนิดหนึ่งโดยสนใจศึกษาอิทธิพลของยาที่มีปริมาณแตกต่างกัน 3 ระดับ และสนใจศึกษาอิทธิพลของอายุของคน 2 กลุ่ม คือ กลุ่มอายุต่ำกว่า 65 ปี และกลุ่มอายุ 65 ปีขึ้นไป หลังจากให้ยาคนไข้แล้ววัดเวลาที่ยาออกฤทธิ์ หน่วยเป็น Millseconds ได้ค่าสังเกตดังตาราง

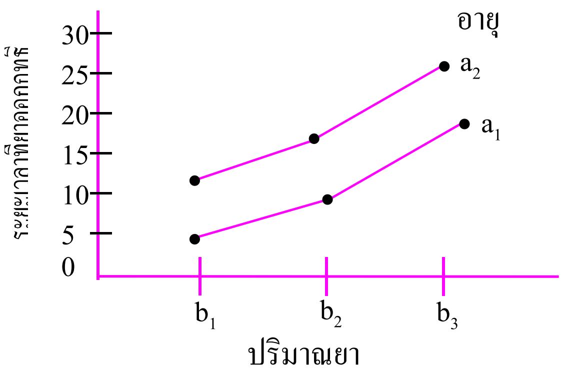
ตาราง 2.1 ระยะเวลาที่ยาออกฤทธิ์ของคนไข้ 2 กลุ่มอายุที่ได้รับยาปริมาณแตกต่างกัน

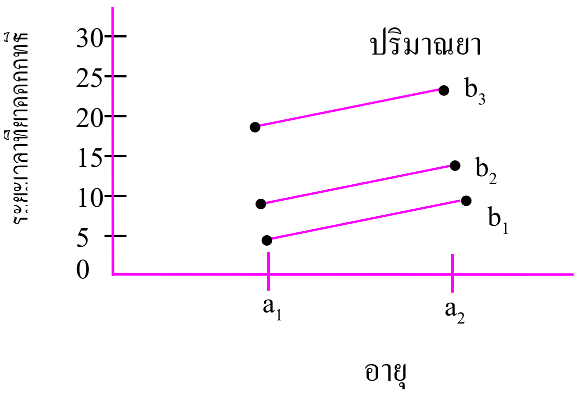
	ปริมาณยา		
อายุ	1	2	3
น้อยกว่า 60 ปี	5	10	20
มากกว่าหรือเท่ากับ 60 ปี	10	15	25

1. จากตารางข้อมูล ปัจจัยอายุทั้ง 2 ระดับมีความแตกต่างระหว่าง 2 ระดับใด ๆ ของปัจจัยปริมาณยาเท่ากันหมดคือ ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของระดับ 1 และ 2 ของปัจจัยปริมาณยาเท่ากับ 5 สำหรับระดับ 2 และ 3 ความแตกต่างเท่ากับ 10 และสำหรับระดับ 1 และ 3 ความแตกต่างเท่ากับ 15

2. จากตารางข้อมูล ปัจจัยปริมาณยาทั้ง 3 ระดับ มีความแตกต่างระหว่าง 2 ระดับของปัจจัยอายุเท่ากันคือ 5

3. เมื่อเอาข้อมูลจากตารางมาพล็อตกราฟจะได้เส้นกราฟที่ขนานกันทุกเส้น ดังภาพ





ภาพ 1 แสดงอิทธิพลร่วมของปัจจัยอายุ และปริมาณยาไม่มีปฏิสัมพันธ์กัน หรือเป็นอิสระกัน

จากภาพแสดงว่าปัจจัยอายุและปัจจัยปริมาณยาไม่มีอิทธิพลร่วมกัน หรือเป็นอิสระกัน แต่ถ้าข้อมูลในตารางเปลี่ยนไปดังนี้

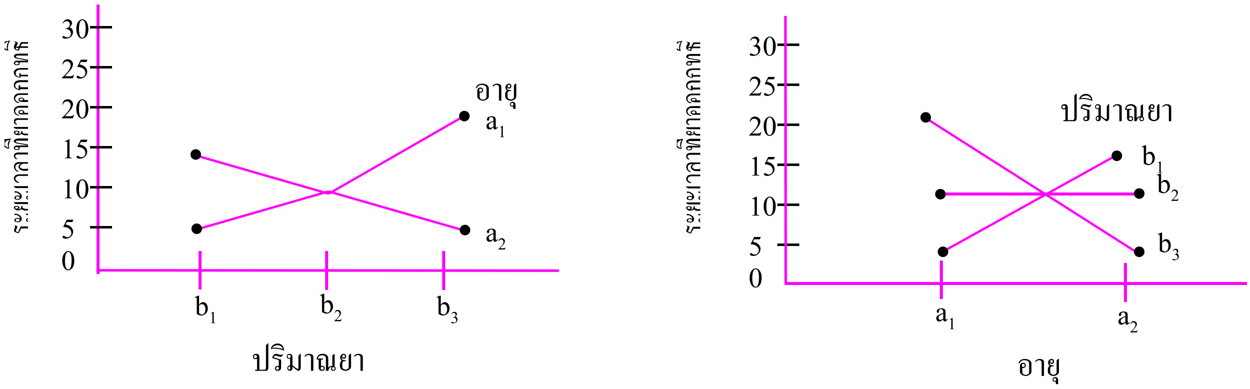
ตาราง 2.2 ระยะเวลาที่ยาออกฤทธิ์ของคนไข้ 2 กลุ่มอายุที่ได้รับยาปริมาณต่าง ๆ

	ปริมาณยา		
อายุ	1	2	3
น้อยกว่า 60 ปี	5	10	20
มากกว่าหรือเท่ากับ 60 ปี	15	10	5

1. จากตารางข้อมูล ปัจจัยอายุทั้ง 2 ระดับ มีความแตกต่างระหว่าง 2 ระดับใด ๆ ของปัจจัยปริมาณยาไม่เท่ากัน เช่น ความแตกต่างระหว่างระดับ 1 และ 2 ของปัจจัยปริมาณยาเท่ากับ –5 สำหรับกลุ่มอายุน้อยกว่า 60 ปี และเท่ากับ +5 สำหรับกลุ่มอายุมากกว่าหรือเท่ากับ 60 ปี

2. จากตารางข้อมูล ปัจจัยปริมาณยาทั้ง 3 ระดับ มีความแตกต่างระหว่าง 2 ระดับ ของปัจจัยอายุไม่เท่ากัน คือ ความแตกต่างระหว่างระดับ 1 และ 2 ของปัจจัยอายุเท่ากับ –10, 0 และ 15 สำหรับระดับ 1, 2 และ 3 ของปัจจัยปริมาณยา ตามลำดับ

3. เมื่อเอาข้อมูลจากตารางมาพล็อตกราฟจะได้เส้นกราฟที่ไม่ขนานกันดังภาพ



ภาพ 2 แสดงอิทธิพลร่วมของปัจจัยอายุและปัจจัยปริมาณยามีปฏิสัมพันธ์กัน หรือไม่เป็นอิสระกัน

จากภาพแสดงว่าปัจจัยอายุและปัจจัยปริมาณยา มีอิทธิพลร่วมกัน หรือไม่เป็นอิสระกัน

สรุปได้ว่ามีอิทธิพลร่วมระหว่าง 2 ปัจจัย ถ้าปัจจัยหนึ่งเปลี่ยนจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งแล้วทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของค่าสังเกตของอีกปัจจัยหนึ่งที่ระดับหนึ่ง แตกต่างจากระดับอื่น ๆ ของปัจจัยที่สองนี้

ประโยชน์ของการทดลองแฟคทอเรียลคือ ทำให้สามารถศึกษาอิทธิพลร่วมของปัจจัยหลาย ๆ ปัจจัย ในการทดลองได้ และประหยัดทั้งเวลาและงบประมาณแทนที่จะศึกษาผลการทดลองทีละปัจจัยทำให้สามารถอธิบายปลายผลการทดลองได้กว้างขวางยิ่งขึ้น

2. การทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

สำหรับการทดลองแฟกทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ มีวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสองทาง ดังนี้

2.1 สร้างตารางข้อมูล 2 ทาง

ตาราง 2.3 รูปแบบข้อมูลการทดลองที่มี 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

	ปัจจัย B					
ปัจจัย A	1	2	. . .	b	ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
1	y_{111}	y_{121}	. . .	y_{1b1}		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$y_{1..}$	$\bar{y}_{1..}$
	y_{11n}	y_{12n}		y_{1bn}		
2	y_{211}	y_{221}	. . .	y_{2bn}		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$y_{2..}$	$\bar{y}_{2..}$
	y_{21n}	y_{22n}	. . .	y_{2bn}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	y_{a11}	y_{a21}	. . .	y_{ab1}		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$y_{a..}$	$\bar{y}_{a..}$
	y_{a1n}	y_{a2n}	. . .	y_{abn}		
ผลรวม	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$	. . .	$y_{.b.}$	$y_{\cdots}$	
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$	. . .	$\bar{y}_{.b.}$		

จากตารางข้อมูลมีปัจจัย 2 ปัจจัย คือ ปัจจัย A และปัจจัย B ปัจจัย A มี a ระดับ ปัจจัย B มี b ระดับ ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน คำนวณจากจำนวนระดับของปัจจัย A คูณ จำนวนระดับของปัจจัย B เท่ากับ ab ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน และแต่ละทรีทเมนต์มี n ค่าสังเกต ใช้สัญลักษณ์แทนผลรวมและค่าเฉลี่ยของแต่ละทรีทเมนต์คอมบิเนชัน ดังนี้

ผลรวมของแต่ละทรีทเมนต์คอมบิเนชัน คือ

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

ค่าเฉลี่ยของแต่ละทรีทเมนต์คอมบิเนชัน คือ

$$\bar{y}_{ij} = \frac{y_{ij\cdot}}{n}$$

2.2 เขียนตัวแบบสถิติแสดงการออกแบบการทดลองเป็นรูปสัญลักษณ์

ตัวแบบสถิติ สำหรับการทดลองที่มี 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบกำหนด เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \quad ; \; j = 1, 2, \ldots, b \quad ; \; k = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ y_{ijk} คือ ค่าสังเกตที่ได้รับทรีทเมนต์ ij ตัวที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

α คือ อิทธิพลของปัจจัย A

β คือ อิทธิพลของปัจจัย B

$(\alpha\beta)$ คือ อิทธิพลร่วมของปัจจัย A และปัจจัย B

e_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ

1. ค่าสังเกตทั้งหลายในแต่ละช่องที่มีทังหมด ab ช่องเป็นกลุ่มตัวอย่างขนาด n เป็นอิสระกันได้มาโดยการสุ่มจากประชากร

2. แต่ละประชากรทั้ง ab ประชากร มีการแจกแจงแบบปกติ

3. ทุกประชากร มีความแปรปรวนเท่ากัน

2.3 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

1. การทดสอบอิทธิพลหลัก

$H_0 : \alpha_i = 0$ VS $H_1 : \alpha_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : \beta_j = 0$ VS $H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2. การทดสอบอิทธิพลร่วม

$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ VS $H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

ก่อนการเก็บข้อมูล ผู้วิจัยอาจจะตัดสินใจเลือกทดสอบเพียงบางสมมติฐานก็ได้ หรือทดสอบทุกสมมติฐานก็ได้ ผู้วิจัยต้องเลือกระดับนัยสำคัญทางสถิติ α แล้วดำเนินการตามขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

2.4 สถิติทดสอบ

สถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบสมมติฐานทางสถิติทั้ง 3 สมมติฐาน คือ อัตราส่วนความแปรปรวน (Variance Ratio)

2.5 การแจกแจงของสถิติทดสอบ

เมื่อ H_0 เป็นจริง และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ สถิติทดสอบจะมีการแจกแจงแบบ F

2.6 กฎการตัดสินใจ

ถ้าค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้ มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติของ F ซึ่งเปิดได้จากตาราง เราจะปฏิเสธ H_0

2.7 คำนวณค่าสถิติทดสอบ

อาศัยขั้นตอนการคำนวณในการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ที่แบ่งผลบวกกำลังสองเนื่องจากความผันแปรทั้งหมดออกเป็น 2 ส่วนคือ

$$SST = SSTr + SSE$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

ผลบวกกำลังสองสำหรับทรีทเมนต์สามารถแบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

หรือ $$SSTr = SSA + SSB + SSAB$$

สูตรที่ใช้ในการคำนวณสำหรับแต่ละเทอมคือ

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}y_{ijk}^2 - CT$$

$$SSTr = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij.}^2}{n} - CT$$

$$SSE = SST - SSTr$$

$$SSA = \frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i..}^2}{bn} - CT$$

$$SSB = \frac{\sum_{i=1}^{b}y_{.j.}^2}{an} - CT$$

และ $$SSAB = SSTr - SSA - SSB$$

เมื่อ $$CT = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}y_{ijk}\right)}{abn}$$

นำผลการคำนวณสรุปลงในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 2.4 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแฟกทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย มีอิทธิพลแบบกำหนดออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

Source of Variation		Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	Variance Ratio
ทรีทเมนต์		SSTr	ab − 1		
	A	SSA	a − 1	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\frac{MSA}{MSE}$
	B	SSB	b − 1	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\frac{MSB}{MSE}$
	AB	SSAB	(a − 1)(b − 1)	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MSAB}{MSE}$
Error		SSE	ab(n − 1)	$MSE = \frac{SSE}{ab(n-1)}$	
Total		SST	abn − 1		

ตัวอย่างที่ 2 การศึกษาการใช้เวลาเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านวัดเป็นนาที กลุ่มตัวอย่างคือพยาบาล 80 คน แบ่งพยาบาลออกเป็นกลุ่มตามอายุ และชนิดของโรคผู้ป่วยที่ไปเยี่ยม หน่วยทดลองคือผู้ป่วย
วัตถุประสงค์ของการวิจัยคือ

1. พยาบาลกลุ่มอายุต่าง ๆ ใช้เวลาเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านเฉลี่ยเท่ากันทุกกลุ่มอายุหรือไม่
2. ชนิดของโรคของผู้ป่วยมีอิทธิพลต่อช่วงเวลาการเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านหรือไม่
3. มีอิทธิพลร่วมระหว่างอายุของพยาบาลกับชนิดของโรคของผู้ป่วยหรือไม่

(Wayne W.Daniel, Biostatistics)

วิธีทำ

1. สร้างตารางข้อมูล ข้อมูลเวลาเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านวัดเป็นนาที แบ่งตามกลุ่มอายุพยาบาล และชนิดของโรคผู้ป่วย

ตาราง 2.5 การใช้เวลาเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านของพยาบาลแยกตามกลุ่มอายุและชนิดของโรคผู้ป่วย

ปัจจัย A	ปัจจัย B (กลุ่มอายุพยาบาล)					
ชนิดของโรคผู้ป่วย	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50+	ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
Cardiac	20	25	24	28		
	25	30	28	31		
	22	29	24	26	534	26.70
	27	28	25	29		
	21	30	30	32		
Cancer	30	30	39	40		
	45	29	42	45		
	30	31	36	50	765	38.25
	35	30	42	45		
	36	30	40	60		
C.V.A.	31	32	41	42		
	30	35	45	50		
	40	30	40	40	766	38.30
	35	40	40	55		
	30	30	35	45		
Tuberculosis	20	23	24	29		
	21	25	25	30		
	20	28	30	28	509	25.45
	20	30	26	27		
	19	31	23	30		
ผลรวม	557	596	659	762	2574	
ค่าเฉลี่ย	27.85	29.8	32.95	38.10		32.18

ทรีทเมนต์	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4
ผลรวม	115	142	131	146	176	150	199	240
ค่าเฉลี่ย	23.0	28.4	26.2	29.2	35.2	30.0	39.8	48.0

ทรีทเมนต์	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	a_3b_4	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	a_4b_4
ผลรวม	166	167	201	232	100	137	128	144
ค่าเฉลี่ย	33.2	33.4	40.2	46.4	20.0	27.4	25.6	28.8

2. ตัวแบบสถิติ

การทดลองนี้มี 2 ปัจจัยเป็นปัจจัยแบบกำหนดออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ตัวแบบสถิติคือ

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

เมื่อ

y_{ijk} คือ ช่วงเวลาเยี่ยมผู้ป่วยของพยาบาลกลุ่มอายุ i ชนิดของโรคผู้ป่วย j ผู้ป่วยคนที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

α_i คือ อิทธิพลของกลุ่มอายุพยาบาล

β_j คือ อิทธิพลของโรคผู้ป่วย

$(\alpha\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมของกลุ่มอายุพยาบาล i และโรคผู้ป่วย j

e_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

3. สมมติฐานทางสถิติ

ต้องการทดสอบสมมติฐานทางสถิติต่อไปนี้

1. การทดสอบอิทธิพลหลัก

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ VS $H_1 : \alpha_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ VS $H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2. การทดสอบอิทธิพลร่วม

$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ VS $H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ $\alpha = 0.05$

4. สถิติทดสอบ ที่ใช้ทดสอบสมมติฐานทางสถิติคือ อัตราส่วนความแปรปรวน

5. การแจกแจงของสถิติทดสอบ เมื่อ H_0 เป็นจริง และเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ ทำให้สถิติทดสอบมีการแจกแจงแบบ F

6. กฎการตัดสินใจ ถ้าค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มากกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤต F ซึ่งเปิดได้จากตารางราจะปฏิเสธ H_0 ค่าวิกฤติ F เปิดได้จากตารางการแจกแจงแบบ F

7. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$CT = \frac{(2574)^2}{80} = 82818.45$$

$$SST = (20^2 + 25^2 + \ldots + 30^2) - 82818.45 = 5741.55$$

$$SSTr = \frac{115^2 + 142^2 + \ldots + 144^2}{5} - 82818.45 = 4801.95$$

$$SSA = \frac{534^2 + 756^2 + 766^2 + 509^2}{20} - 82818.45 = 2992.45$$

$$SSB = \frac{557^2 + 596^2 + 659^2 + 762^2}{20} - 82818.45 = 1201.05$$

$$SSAB = 4801.95 - 2992.45 - 1201.05 = 608.45$$

$$SSE = 5741.55 - 4801.95 = 939.60$$

สรุปลงในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 2.6 วิเคราะห์ความแปรปรวนของการใช้เวลาเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้าน

Source of Variation	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	F_0
ทรีทเมนต์	4801.95	15		
A	2992.45	3	997.48	67.95
B	1201.05	3	400.35	27.27
AB	608.45	9	67.61	4.61
Error	939.60	64	14.68	
Total	5741.55	79		

8. การตัดสินใจทางสถิติ

จากตารางการแจกแจงแบบ F ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ $\alpha = 0.5$

$F_{.05,3,64} = 2.76$ และ $F_{.05,9,64} = 2.04$

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ F_0 หรืออัตราส่วนความแปรปรวนกับค่าวิกฤติ F ซึ่งเปิดได้จากตาราง พบว่า F_0 มากกว่าค่าวิกฤติ F จากตารางทุกค่า ดังนั้นจึงปฏิเสธ H_0 ทั้ง 3 สมมติฐาน

9. สรุปผล

1. ปฏิเสธ $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ นั่นคือ มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของช่วงเวลาการเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้าน ตามชนิดของโรคผู้ป่วย

2. ปฏิเสธ $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ นั่นคือ มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของช่วงเวลาการเยี่ยมที่บ้าน ตามกลุ่มอายุพยาบาล

3. ปฏิเสธ $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ นั่นคือ ปัจจัยอายุพยาบาลและปัจจัยชนิดของโรคผู้ป่วยมีอิทธิพลร่วมกันหรือไม่เป็นอิสระกัน

3. การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ (Multiple Comparison)

หลังจากการวิเคราะห์ความแปรปรวนถ้าพบว่ามีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ของด้านแถวหรือคอลัมน์ ขั้นตอนต่อไปทำการเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ ทางด้านแถวหรือคอลัมน์

สำหรับการทดลองนี้มีอิทธิพลร่วม AB อย่างมีนัยสำคัญ ทำให้การเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของปัจจัยหนึ่ง เช่น ปัจจัย A อาจถูกรบกวนจากอิทธิพลร่วม AB สำหรับสถานการณ์เช่นนี้เราสามารถดำเนินการเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของปัจจัย A โดยกำหนดให้ ปัจจัย B อยู่ที่ระดับใดระดับหนึ่ง

3.1 การเปรียบเทียบโดยใช้วิธีดันแคน (Duncan’s multiple range test)

จากตัวอย่างที่ 2 สมมติว่า เราสนใจเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่เป็นชนิดของโรคผู้ป่วย 4 โรค เนื่องจากอิทธิพลร่วมมีนัยสำคัญ เราจะทำการเปรียบเทียบที่กลุ่มอายุของพยาบาลกลุ่มหนึ่ง เช่น ที่กลุ่มอายุ 20 – 29 ปี เราทราบว่าค่าประมาณที่ดีที่สุดของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองคือ MSE และจากข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่าทุกทรีทเมนต์คอมบิเนชันมีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองเท่ากัน ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทมเมนต์ต่าง ๆ คือ

$$S_{\bar{x}_{i1.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{14.68}{5}} = 1.7135$$

ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่เป็นชนิดของโรคผู้ป่วย 4 โรค คือ

ค่าเฉลี่ยของโรค

$$\text{Cardiac,} \quad \bar{x}_{11.} = 23.0$$

$$\text{Cancer,} \quad \bar{x}_{21.} = 35.2$$

C.V.A , $\bar{x}_{31.}$ = 33.2

Tuberculosis, $\bar{x}_{41.}$ = 20.0

1. เรียงลำดับค่าเฉลี่ยของโรคผู้ป่วย

$\bar{x}_{41.}$	$\bar{x}_{11.}$	$\bar{x}_{31.}$	$\bar{x}_{21.}$
20.0	23.0	33.2	35.2

2. ช่วงนัยสำคัญจากตาราง Significant Ranges for Duncan's Multiple Range Test

$$r_{.05}(2,64) = 2.83$$

$$r_{.05}(3,64) = 2.98$$

$$r_{.05}(4,64) = 3.08$$

Least significant ranges คือ

$$R_2 = r_{.05}(2, 64) S_{\bar{X}_{i1.}} = (2.83)(1.7135) = 4.8492$$

$$R_3 = r_{.05}(3, 64) S_{\bar{X}_{i1.}} = (2.98)(1.7135) = 5.1062$$

$$R_4 = r_{.05}(4, 64) S_{\bar{X}_{i1.}} = (3.08)(1.7135) = 5.2776$$

3. การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย

$$2 \text{ vs } 4 : \quad 35.2 - 20.0 = 15.2 > R_4$$

$$2 \text{ vs } 1 : \quad 35.2 - 23.0 = 12.2 > R_3$$

$$2 \text{ vs } 3 : \quad 35.2 - 33.2 = 2.0 < R_2$$

$$3 \text{ vs } 4 : \quad 33.2 - 20.0 = 13.2 > R_3$$

$$3 \text{ vs } 1 : \quad 33.2 - 23.0 = 10.2 > R_2$$

$$1 \text{ vs } 4 : \quad 23.0 - 20.0 = 3.0 < R_2$$

4. ขีดเส้นใต้เฉพาะคู่ที่ไม่มีนัยสำคัญ

$$\underline{\bar{x}_{41.} \quad \bar{x}_{11.}} \qquad \underline{\bar{x}_{31.} \quad \bar{x}_{21.}}$$

5. ผลการเปรียบเทียบพยาบาลที่กลุ่มอายุ 20 – 29 ปี สรุปได้ว่า ผู้ป่วยโรค Cardiac และ Tuberculosis มีช่วงเวลาการเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านไม่แตกต่างกัน และผู้ป่วยโรค Cancer และ C.V.A ก็มีช่วงเวลาการเยี่ยมผู้ป่ายที่บ้านไม่แตกต่างกัน แต่ผู้ป่ายทั้ง 2 กลุ่มนี้ มีช่วงเวลาการเยี่ยมผู้ป่วยที่บ้านแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

3.2 การเปรียบเทียบทรีทเมนต์ทั้งหมดทีละคู่ โดยใช้วิธีของฟิชเชอร์ (Least Significant Difference : LSD)

3.2.1 สำหรับปัจจัย A ต้องการเปรียบเทียบทรีทเมนต์ที่เป็นชนิดของโรคผู้ป่วย โดยทดสอบ 2 ทางดังนี้

1. คำนวณค่า LSD

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2},n-k}\sqrt{\frac{2MSE}{bn}} = t_{\frac{\alpha}{2},64}\sqrt{\frac{2(14.68}{(4)(5)}}$$

$$= 2.000(1.2116) = 2.4232$$

2. คำนวณค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ที่เป็นไปได้ดังแสดงในตาราง

ตาราง 2.7 ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของปัจจัยโรคผู้ป่วยทุกคู่

	Cardiac	Cancer	C.V.A.	Tub erculosis
Cardiac	–	11.55*	11.60*	1.25
Cancer	–	–	0.05	12.80*
C.V.A.	–	–	–	12.85*
Tub erculeiss	–	–	–	–

3. เปรียบเทียบค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของชนิดของโรคผู้ป่วยแต่ละคู่กับค่า LSD เพื่อทดสอบสมมติฐานสูญ สรุปผลได้ดังนี้

สมมติฐานสูญ	LSD	การตัดสินใจ
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก $11.55 > 2.4232$
$H_0 : \mu_1 = \mu_3$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก $11.60 > 2.4232$
$H_0 : \mu_1 = \mu_4$	2.4232	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก $1.25 < 2.4232$
$H_0 : \mu_2 = \mu_3$	2.4232	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก $0.05 < 2.4232$
$H_0 : \mu_2 = \mu_4$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก $12.80 > 2.4232$
$H_0 : \mu_3 = \mu_4$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก $12.85 > 2.4232$

3.2.2 สำหรับปัจจัย B ต้องการเปรียบเทียบทรีทเมนต์ที่เป็นกลุ่มอายุพยาบาลโดยการทดสอบ 2 ทาง

1. คำนวณค่า LSD = 2.4232

2. คำนวณค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทุกกลุ่มอายุพยาบาลทุกคู่ที่เป็นไปได้ดังแสดงในตาราง

ตาราง 2.8 ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของปัจจัยกลุ่มอายุพยาบาลทุกคู่

	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50+
20 – 29	–	1.95	5.10*	10.25*
30 – 39	–	–	3.15*	8.30*
40 – 49	–	–	–	5.15*
50+	–	–	–	–

3. เปรียบเทียบค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มอายุพยาบาลแต่ละคู่กับ LSD เพื่อทดสอบสมมติฐานสูญ สรุปผลได้ดังนี้

สมมติฐานสูญ	LSD	สรุปผล
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	2.4232	ไม่ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 1.95 < 2.4232
$H_0 : \mu_1 = \mu_3$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 5.10 > 2.4232
$H_0 : \mu_1 = \mu_4$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 10.25 > 2.4232
$H_0 : \mu_2 = \mu_3$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 3.15 > 2.4232
$H_0 : \mu_2 = \mu_4$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 8.30 > 2.4232
$H_0 : \mu_3 = \mu_4$	2.4232	ปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก 5.15 > 2.4232

4. การทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

สำหรับการทดลองแฟกทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์มีวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนดังนี้

4.1 สร้างตารางข้อมูล

ตาราง 2.9 รูปแบบข้อมูลสำหรับการทดลองที่มี 3 ปัจจัยออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

	ปัจจัย B									
	1				...	b				
	ปัจจัย C				...	ปัจจัย C				
ปัจจัย A	1	2	....	c		1	2	...	c	$y_{i\cdots}$
1	y_{1111}	y_{1121}	....	y_{11c1}		y_{1b11}	y_{1b21}	....	y_{1bc1}	
	y_{1112}	y_{1122}	....	y_{11c2}		y_{1b12}	y_{1b22}	....	y_{1bc2}	
	.	.	.			.	.			
	.	.	.			.	.			
	.	.	.			.	.			
	y_{111n}	y_{112n}	....	y_{11cn}		y_{1b1n}	y_{1b2n}	....	y_{1bcn}	$y_{1\cdots}$
2	y_{2111}	y_{2121}	....	y_{21c1}		y_{2b11}	y_{2b21}	....	y_{2bc1}	
	y_{2112}	y_{2122}	....	y_{21c2}		y_{2b12}	y_{2b22}	....	y_{2bc2}	
	.	.				.	.			
	.	.				.	.			
	.	.				.	.			
	y_{211n}	y_{212n}	....	y_{21cn}		y_{2b1n}	y_{2b2n}	....	y_{2bcn}	$y_{2\cdots}$
.										.
.										.
.										.
a	y_{a111}	y_{a121}	....	y_{a1c1}		y_{ab11}	y_{ab21}	....	y_{abc1}	
	y_{a112}	y_{a122}	....	y_{a1c2}		y_{ab12}	y_{ab22}	....	y_{abc2}	
	.	.				.	.			
	.	.				.	.			
	.	.				.	.			
	y_{a11n}	y_{a12n}	....	y_{a1cn}		y_{ab1n}	y_{ab2n}	....	y_{abcn}	$y_{a\cdots}$
$y_{\cdot jk\cdot}$	$y_{\cdot 11\cdot}$	$y_{\cdot 12\cdot}$	....	$y_{\cdot 1c\cdot}$	...	$y_{\cdot b1\cdot}$	$y_{\cdot b2\cdot}$	....	$y_{\cdot bc\cdot}$	
$y_{\cdot j\cdot\cdot}$	$y_{\cdot 1\cdot\cdot}$				...	$y_{\cdot b\cdot\cdot}$				$y_{\cdots\cdot}$

จากตารางข้อมูลมีปัจจัย 3 ปัจจัยคือ ปัจจัย A มี a ระดับ ปัจจัย B มี b ระดับและปัจจัย C มี c ระดับ ทรีทเมนต์คอมบิเนชันคำนวณจากจำนวนระดับของทั้ง 3 ปัจจัยเท่ากับ abc ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน และแต่ละทรีทเมนต์คอมบิเนชันมี n ค่าสังเกต

4.2 เขียนตัวแบบสถิติแสดงการออกแบบการทดลองเป็นรูปสัญลักษณ์

ตัวแบบสถิติสำหรับการทดลองที่มี 3 ปัจจัยออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบกำหนดเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

$$i = i, 2, \ldots, a; \quad j = 1, 2, \ldots, b \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, c \; ; l = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ y_{ijk} คือ ค่าสังเกตที่ได้รับทรีทเมนต์ ijk ตัวที่ l

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

α_i คือ อิทธิพลของปัจจัย A

β_j คือ อิทธิพลของปัจจัย B

γ_k คือ อิทธิพลของปัจจัย C

$(\alpha\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมของปัจจัย A และปัจจัย B

$(\alpha\gamma)_{ik}$ คือ อิทธิพลร่วมของปัจจัย A และปัจจัย C

$(\beta\gamma)_{jk}$ คือ อิทธิพลร่วมของปัจจัย B และปัจจัย C

e_{ijkl} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

4.3 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบ คือ

1. การทดสอบอิทธิพลหลัก

$H_0: \alpha_i = 0$ VS $H_1: \alpha_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0: \beta_j = 0$ VS $H_1: \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0: \gamma_k = 0$ VS $H_1: \gamma_k \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2. การทดสอบอิทธิพลร่วม

$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ VS $H_1: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0: (\alpha\gamma)_{ik} = 0$ VS $H_1: (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0: (\beta\gamma)_{jk} = 0$ VS $H_1: (\beta\gamma)_{jk} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0: (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$ VS $H_1: (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

4.4 คำนวณค่าสถิติทดสอบ

การคำนวณผลบวกกำลังสองสำหรับทรีทเมนต์สามารถแบ่งออกเป็น 7 ส่วนคือ

$$SSTr = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC$$

สูตรที่ใช้ในการคำนวณสำหรับแต่ละเทอม คือ

$$SST = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c}\sum_{\ell}^{n} y_{ijk\ell}^{2} - CT$$

$$SSA = \frac{1}{bcn}\sum_{i}^{a} y_{i\cdot\cdot}^{2} - CT$$

$$SSB = \frac{1}{acn}\sum_{j}^{b} y_{\cdot j\cdot\cdot}^{2} - CT$$

$$SSC = \frac{1}{abn}\sum_{k}^{c} y_{\cdot\cdot k\cdot}^{2} - CT$$

$$SSAB = \frac{1}{cn}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} y_{ij\cdot\cdot}^{2} - CT - SSA - SSB$$

$$SSAC = \frac{1}{bn}\sum_{i}^{a}\sum_{k}^{c} y_{i\cdot k\cdot}^{2} - CT - SSA - SSC$$

$$SSBC = \frac{1}{an}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{\cdot jk\cdot}^{2} - CT - SSB - SSC$$

$$SSABC = \frac{1}{n}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{ijk\cdot}^{2} - CT - SSA - SSB - SSC - SSAB$$

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSC - SSAB - SSAC - SSBC - SSABC$$

เมื่อ $$CT = \frac{y_{\cdot\cdot\cdot\cdot}}{abcn}$$

นำผลการคำนวณสรุปลงในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 2.10 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแฟกทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย มีอิทธิพลแบบกำหนดออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

Source of Variation	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	F_0
ทรีทเมนต์	SSTr	abc − 1		
A	SSA	a − 1	MSA	$\frac{MSA}{MSE}$
B	SSB	b − 1	MSB	$\frac{MSB}{MSE}$
C	SSC	c − 1	MSC	$\frac{MSC}{MSE}$
AB	SSAB	(a − 1)(b − 1)	MSAB	$\frac{MSAB}{MSE}$
AC	SSAC	(a − 1)(c − 1)	MSAC	$\frac{MSAC}{MSE}$
BC	SSBC	(b − 1)(c − 1)	MSBC	$\frac{MSBC}{MSE}$
ABC	SSABC	(a − 1)(b − 1)(c − 1)	MSABC	$\frac{MSABC}{MSE}$
Error	SSE	abc(n − 1)	MSE	
Total	SST	abcn − 1		

ตัวอย่างที่ 3 สุรชา ลิ้มตระกูลธงชัย (2541) ทำการศึกษาเรื่องอิทธิพลของปุ๋ยเคมี สารเร่งการเจริญเติบโตและวิธีการเก็บเกี่ยวที่มีผลต่อการแตกยอดแขนงครั้งที่ 2 ในผักคะน้า เป็นปัญหาพิเศษ ผู้วิจัยสนใจศึกษาปุ๋ยเคมี 3 ชนิด คือ 1) 46-0-0 2) 25-7-7 และ 3) 16-16-16 ผู้วิจัยสนใจวิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก 2 วิธีคือ เก็บเกี่ยวเหลือใบล่าง 2 ใบ และเก็บเกี่ยวไม่เหลือ 2 ใบล่าง และสนใจศึกษาสารเร่งการเจริญเติบโตโดยใช้อโทนิคหลังการเก็บเกี่ยวผลผลิตครั้งแรก 3 วิธี คือ 1) ไม่ใช้สาร 2) พ่นสาร อโทนิค ในอัตรา 3 ml ต่อน้ำ 20 ลิตร และ 3) ทาสารอโทนิคในอัตรา 3 ml ต่อน้ำ 20 ลิตร เป็นการทดลองแฟกทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ดำเนินการทดลองปลูกผักคะน้าใส่ถุงถุงละ 3 ต้น จำนวน 54 ถุง ทำการทดลอง 3 ซ้ำ เมื่อคะน้าอายุ 60 วัน เก็บข้อมูลโดยนับจำนวนใบของผักคะน้าได้ข้อมูลดังตาราง

วิธีทำ

1. สร้างตารางข้อมูล ข้อมูลจำนวนใบของผักคะน้าที่อายุ 60 วัน ที่ใช้ปุ๋ยเคมี สารเร่งการเจริญเติบโต และวิธีเก็บเกี่ยวแตกต่างกัน

ตาราง 2.11 จำนวนใบของผักคะน้าที่อายุ 60 วัน ที่ใช้ปุ๋ยเคมี สารเร่งการเจริญเติบโต และวิธีเก็บเกี่ยวแตกต่างกัน

ปุ๋ยเคมี (A)	วิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก (B)						
	ตัดไม่เหลือ 2 ใบล่าง ไว้กับตอ			ตัดเหลือ 2 ใบล่างไว้กับตอ			
	สารเร่งการเจริญเติบโต (C)			สารเร่งการเจริญเติบโต (C)			
	ไม่ใช้	พ่น	ทา	ไม่ใช้	พ่น	ทา	$y_{i\cdots}$
	29	35	42	33	40	44	
46 - 0 - 0	31	38	41	33	43	47	
	33	39	40	31	42	48	689
	27	33	47	31	40	47	
25 - 7 - 7	44	36	45	33	42	46	
	30	37	47	31	43	48	709
	28	34	42	29	44	41	
16 - 16 - 16	29	36	47	31	44	40	
	29	36	47	31	43	40	671
$y_{\cdot jk\cdot}$	280	326	398	283	381	401	
$y_{\cdot j\cdot\cdot}$	1004			1065			$y_{\cdots\cdot} = 2069$

A × B totals

$y_{ij\cdot\cdot}$

A	B	
	ตัดไม่เหลือ	ตัดเหลือ 2 ใบ
46 - 0 - 0	328	361
25 - 7 - 7	348	361
16 - 16 - 16	328	343

A × C totals

$y_{i\cdot k\cdot}$

A	C		
	ไม่ใช้	พ่น	ทา
46 - 0 - 0	190	237	262
25 - 7 - 7	196	233	280
16 - 16 - 16	177	237	257

C totals

$y_{\cdot\cdot k\cdot}$

C		
ไม่ใช้	พ่น	ทา
563	707	799

ให้ A เป็นปุ๋ยเคมี มี 3 ระดับคือ

1 ปุ๋ย 46 - 0 - 0

2 ปุ๋ย 25 - 7 - 7

3 ปุ๋ย 16 - 16 - 16

ให้ B เป็นวิธีเก็บเกี่ยวผลผลิตครั้งแรกมี 2 ระดับคือ

1 ตัดไม่เหลือ 2 ใบล่างไว้กับตอ

2 ตัดเหลือ 2 ใบล่างไว้กับตอ

ให้ C เป็นการใช้สารอโทนิคหลังการเก็บเกี่ยวครั้งแรกมี 3 ระดับคือ

1 ไม่ใช้สาร

2 พ่นสารอโทนิค 3 ml ต่อน้ำ 20 ลิตร

3 ทา สารอโทนิค 3 ml ต่อน้ำ 20 ลิตร

2. ตัวแบบสถิติ

การทดลองที่มี 3 ปัจจัย เป็นปัจจัยแบบกำหนดออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ตัวแบบสถิติ คือ

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

เมื่อ μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมดของจำนวนใบผักคะน้า

α_i คือ อิทธิพลของปุ๋ยเคมีก่อนเก็บเกี่ยวมี 3 ระดับ

β_j คือ อิทธิพลของวิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรกมี 2 ระดับ

γ_k คือ อิทธิพลของการใช้สารเคมีหลังเก็บเกี่ยวครั้งแรกมี 3 ระดับ

$(\alpha\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปุ๋ยเคมีและวิธีการเก็บเกี่ยวครั้งแรก

$(\alpha\gamma)_{ik}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปุ๋ยเคมีและการใช้สารเคมีหลังเก็บเกี่ยวครั้งแรก

$(\beta\gamma)_{jk}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างวิธีการเก็บเกี่ยวและการใช้สารเร่งการเจริญเติบโต

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่างปุ๋ยเคมี วิธีการเก็บเกี่ยวครั้งแรกและการใช้สารเร่งการเจริญเติบโต

e_{ijkl} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

3. สมมติฐานทางสถิติ

ต้องการทดสอบสมมติฐานทางสถิติต่อไปนี้

3.1 การทดสอบอิทธิพลหลัก

การทดสอบสมมติฐานของปัจจัย A คือปุ๋ยเคมี

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ VS $H_1 : \alpha_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

เมื่อ i = 1, 2, 3

การทดสอบสมมติฐานของปัจจัย B คือ วิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ VS $H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

เมื่อ j = 1, 2

การทดสอบสมมติฐานของปัจจัย C คือ การใช้สารเร่งการเจริญเติบโต

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ VS $H_1 : \gamma_1 \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

เมื่อ k = 1, 2, 3

3.2 การทดสอบอิทธิพลร่วม

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วมของ 2 ปัจจัย คือ AB AC และ BC

$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ VS $H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0$ และ $k = 1, 2, 3$ VS $H_1 : (\beta\gamma)_{jk} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : (\alpha\gamma)_{ik} = 0$ VS $H_1 : (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วม 3 ปัจจัย คือ ABC

$H_0 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$ VS $H_1 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

การทดสอบสมมติฐานเริ่มจากการทดสอบอิทธิพลร่วมก่อนถ้ามีนัยสำคัญก็ทำการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเป็นคู่ต่อไป

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$CT = \frac{y....}{abcn} = \frac{(689 + 709 + 671)^2}{3 \times 2 \times 3 \times 3} = 79273.352$$

$$\begin{aligned}
SST &= \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c}\sum_{\ell}^{d} y_{ijk}^2 - CT \\
&= 29^2 + 31^2 + 33^2 + \ldots + 40^2 + 40^2 - 79273.352 \\
&= 81439 - 79273.352 \\
&= 2165.648
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SSA &= \frac{1}{bcn}\sum_{i}^{a} y_{i}^{2}.... - CT \\
&= \frac{1}{2 \times 3 \times 3}(689^2 + 709^2 + 671^2) \\
&= 79313.50 - 79273.352 \\
&= 40.148
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SSB &= \frac{1}{acn}\sum_{j}^{b} y._{j}^{2}.. - CT \\
&= \frac{1}{3 \times 3 \times 3}[1004^2 + 1065^2] - 79253.352 \\
&= 88.907
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SSC &= \frac{1}{abn}\sum_{k}^{c} y.._{k}^{2}. - CT \\
&= \frac{1}{3 \times 2 \times 3}[563^2 + 707^2 + 799^2] - 79253.352 \\
&= 142.537
\end{aligned}$$

$$SSAC = \frac{1}{bn}\sum_{i}^{a}\sum_{k}^{c} y_{i \bullet k \bullet}^{2} - CT - SS_A - SS_C$$

$$= \frac{1}{2 \times 3}[190^2 + 237^2 + \ldots. + 237^2 + 257^2] -$$

$$79253.352 - 40.148 - 1592.148$$

$$= 41.852$$

$$SSBC = \frac{1}{an}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{\bullet k \bullet}^{2} - CT - SS_B - SS_C$$

$$= \frac{1}{3 \times 3}[280^2 + 326^2 + \ldots + 381^2 + 401^2] - 79253.352$$

$$- 88907 - 1592.148$$

$$= 80.149$$

$$SSBAC = \frac{1}{n}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{ijk} - CT - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB}$$

$$= \frac{1}{3}[93^2 + 112^2 + \ldots 131^2 + 121^2] - 79253.352 -$$

$$40.148 - 88.907 - 1592.148 - 142.537$$

$$= 84.575$$

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSC - SSAB - SSAC - SSBC - SSABC$$

$$= 2165.648 - 40.148 - 88.907 - 1592.148 - 142.537 - 41.852 -$$

$$80.149 - 84.575$$

$$= 95.332$$

$$SSTr = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} \frac{T_{ijk\bullet}^{2}}{n} - CT$$

$$= \frac{93^2}{3} + \ldots + \frac{121^3}{3} - 79273.352$$

$$= 1928.31$$

สรุปลงในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 2.12 วิเคราะห์ความแปรปรวนของการทดลองเรื่องอิทธิพลของปุ๋ยเคมีสารเร่งการเจริญเติบโตและวิธีการเก็บเกี่ยวที่มีผลต่อการแตกยอดแขนงครั้งที่ 2 ในผักคะน้า ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

Source of Variation	Degree of Freeddom	Sum of Square	Mean Square	F_0
ปุ๋ยเคมี (A)	2	40.	20.074	7.581
วิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก (B)	1	88.907	88.907	33.575
สารเร่งการเจริญเติบโต (C)	2	1592.148	781.074	294.968
AB	2	142.537	71.269	26.914
AC	4	41.852	10.463	3.951
BC	2	80.149	40.075	15.134
ABC	4	84.575	21.144	7.985**
Error	36	95.332	2.648	
Total	53	2165.648		

5. การตัดสินใจทางสถิติ

จากตารางการแจกแจงแบบ F ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

$$F_{0.05,1,36} \approx 4.05,\ F_{0.05,2,36} \approx 3.20,\ F_{0.05,4,36} \approx 2.80$$

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ F_0 กับค่าวิกฤติ F ซึ่งเปิดได้จากตารางพบว่า F_0 มากกว่าค่าวิกฤติ F จากตารางทุกค่า ดังนั้นจึงปฏิเสธ H_0 ทั้ง 7 สมมติฐาน

6. สรุปผลการทดสอบ
   1. มีอิทธิพลร่วมระหว่างปุ๋ยเคมีและวิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก
   2. มีอิทธิพลร่วมระหว่างปุ๋ยเคมีและการใช้สารเร่งการเจริญเติบโต
   3. มีอิทธิพลร่วมระหว่างวิธีเก็บเกี่ยวและการใช้สารเร่งการเจริญเติบโต
   4. มีอิทธิพลร่วมระหว่างปุ๋ยเคมี วิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก และการใช้สารเร่งการเจริญเติบโต
   5. มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของจำนวนใบคะน้าตามชนิดของปุ๋ยเคมี
   6. มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของจำนวนใบคะน้าตามวิธีเก็บเกี่ยวครั้งแรก
   7. มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของจำนวนใบคะน้าตามชนิดของสารเร่งการเจริญเติบโต

5. ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย (Expected Mean Square)

ปัญหาสำคัญของการออกแบบการทดลองใด ๆ คือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนซึ่งเกี่ยวข้องกับผลบวกกำลังสองสำหรับองค์ประกอบต่าง ๆ ของตัวแบบ และจำนวนชั้นอิสระของผลบวกกำลังสองแต่ละตัว แล้วจึงสามารถสร้างสถิติทดสอบที่เหมาะสมโดยอาศัยค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

5.1 กฎการสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

กฎข้อ 1 ความคลาดเคลื่อนของการทดลอง e_{ijkl_n} จะเขียนใหม่เป็น $e_{(ij...)n}$ โดยให้ n แทนจำนวนซ้ำ

กฎข้อ 2 สำหรับตัวแบบที่มีอิทธิพลร่วมของปัจจัยทั้งหมด ในตัวแบบที่มีปัจจัย k ปัจจัยจะมีอิทธิพลร่วม 2 ปัจจัยที่เป็นไปได้จำนวน $\binom{k}{2}$ จะมีอิทธิพลร่วม 3 ปัจจัยที่เป็นไปได้จำนวน $\binom{k}{3}$ เป็นเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ และสุดท้ายคืออิทธิพลร่วม k ปัจจัยจำนวน 1

กฎข้อ 3 สำหรับแต่ละเทอมแบ่งตัวห้อยของแต่ละเทอมออกเป็น 3 ชนิดคือ

1. ตัวห้อยที่มีชีวิต คือ ตัวห้อยที่ปรากฏในเทอมและไม่อยู่ในวงเล็บ
2. ตัวห้อยที่ตาย คือ ตัวห้อยที่ปรากฏในเทอมและอยู่ในวงเล็บ
3. ตัวห้อยที่หายไป คือ ตัวห้อยที่ไม่ปรากฏในเทอม แต่ปรากฏในตัวแบบ

ตัวอย่างเช่น เทอม $(\tau\beta)_{ij}$ ตัวห้อย i , j คือ ตัวห้อยมีชีวิตและ k คือตัวห้อยที่หายไป อีกตัวอย่างหนึ่งเช่น เทอม $e_{(ij)k}$ ตัวห้อย k คือ ตัวห้อยมีชีวิตและ i , j คือตัวห้อยที่ตาย

กฎข้อ 4 จำนวนชั้นอิสระของแต่ละเทอมในตัวแบบ คือ ผลคูณของจำนวนระดับของตัวห้อยที่ตาย และจำนวนระดับของตัวห้อยที่มีชีวิตลบ 1

ตัวอย่างเช่น จำนวนชั้นอิสระของเทอม $(\tau\beta)_{ij}$ คือ (a 1)(b – 1) และจำนวนชั้นอิสระของเทอม $e_{(ij)k}$ คือ ab(n – 1)

กฎข้อ 5 แต่ละเทอมในตัวแบบจะมีอิทธิพลแบบสุ่ม (ส่วนประกอบของความแปรปรวน) หรืออิทธิพลแบบกำหนด สำหรับอิทธิพลร่วมที่มีอิทธิพลสุ่มอย่างน้อย 1 ตัว อิทธิพลร่วมจะเป็นแบบสุ่ม กำหนดให้ความแปรปรวนที่มีตัวห้อยเป็นตัวกรีก แทนอิทธิพลแบบสุ่ม

ตัวอย่างเช่น ตัวแบบผสมที่มีปัจจัย A เป็นปัจจัยกำหนด และปัจจัย B เป็นปัจจัยสุ่ม ดังนั้น ความแปรปรวนของปัจจัย B คือ σ_{β}^2 ความแปรปรวนของอิทธิพลร่วม AB คือ $\sigma_{\tau\beta}^2$

สำหรับปัจจัย A มีอิทธิพลแบบกำหนด เขียนแทนได้เป็น

$$\frac{\sum_{i}^{a} \tau_i^2}{a-1}$$

คือผลบวกกำลังสองขององค์ประกอบของตัวแบบหารด้วยจำนวนชั้นอิสระ

กฎข้อ 6 ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย หาได้จากการสร้างตาราง โดยให้แถวแทนด้วยองค์ประกอบของตัวแบบแต่ละตัว และคอลัมน์แทนตัวห้อยแต่ละตัว บนตัวห้อยเขียนจำนวนระดับของปัจจัยและใส่ F สำหรับอิทธิพลแบบกำหนด และ R สำหรับอิทธิพลแบบสุ่ม

5.2 ขั้นตอนการสร้างตารางค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

1. ในแต่ละแถวใส่ 1 ถ้าตัวห้อยตายในแถวจับคู่กับตัวห้อยในคอลมัน์

องค์ประกอบของตัวแบบ	F a i	F b j	R n k
τ_i			
β_j			
$(\tau\beta)_{ij}$			
$e_{(ij)k}$	1	1	

2. ในแต่ละแถวถ้าตัวห้อยขององค์ประกอบในแถวจับคู่กับตัวห้อยในคอลัมน์ใส่ 0 สำหรับปัจจัยกำหนดและใส่ 1 สำหรับปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบ	F a i	F b j	R n k
τ_i	0		
β_j		0	
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	
$e_{(ij)k}$	1	1	1

3. ในตำแหน่งว่างที่เหลือในแต่ละแถว เขียนจำนวนระดับของปัจจัยที่อยู่ในแต่ละคอลัมน์

องค์ประกอบของตัวแบบ	F a i	F b j	R n k
τ_i	0	b	n
β_j	a	0	n
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	n
$e_{(ij)k}$	1	1	1

4. เขียนค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย หรือ E(MS) สำหรับองค์ประกอบแต่ละตัวในตัวแบบโดยมีวิธีการดังนี้

ขั้นแรกคือ ปิดคอลัมน์ที่มีตัวห้อยมีชีวิตแล้วดูว่าในแต่ละแถวที่มีตัวห้อยเหมือนกับตัวห้อยในแถวที่เราสนใจนำมาพิจารณาทุกตัว คูณจำนวนที่เห็นด้วยปัจจัยกำหนดหรือปัจจัยสุ่มนั้นแล้วบวกทุกจำนวนเป็น E(MS) ขององค์ประกอบแต่ละตัวในตัวแบบ

ตัวอย่างเช่น ต้องการหาค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยของปัจจัย A หรือ E(MSA) ขั้นแรกปิดคอลัมน์ i และคูณทุกแถวที่มีตัวห้อย i ด้วยจำนวนที่เห็น คือ bn (แถว 1) , 0 (แถว 3) , และ 1 (แถว 4) แล้วบวกทุกจำนวนได้เป็น

$$E(MSA) \quad = \quad \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i}^{a} \tau_i^2}{a-1}$$

ตาราง 2.13 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัยและเป็นปัจจัยแบบกำหนด

องค์ประกอบของตัวแบบ	F a i	F b j	R n k	ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)
τ_i	0	b	n	$\sigma^2 + \dfrac{bn\sum_i^a \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{an\sum \beta_j^2}{b-1}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{n\sum_i\sum_j (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$e_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 4 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัยที่ปัจจัย A มี a ระดับ ปัจจัย B มี b ระดับ ปัจจัย C มี c ระดับ ทั้ง 3 ปัจจัยเป็นปัจจัยกำหนด และมี n จำนวนซ้ำ ตัวแบบสถิติของการทดลองนี้คือ

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, b \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots c \quad ; \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

ตาราง 2.14 วิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย

Source of Variation	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square
A	SSA	a – 1	MSA
B	SSB	b – 1	MSB
C	SSC	c – 1	MSC
AB	SSAB	(a –1)(b – 1)	MSAB
AC	SSAC	(a – 1)(c – 1)	MSAC
BC	SSBC	(b – 1)(c – 1)	MSBC
ABC	SSABC	(a – 1)(b – 1)(c – 1)	MSABC
Error	SSE	abc(n – 1)	MSE
Total	SST	abcn – 1	

ตาราง 2.15 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัยและเป็นปัจจัยแบบกำหนด

องค์ประกอบของตัวแบบ	F a i	F b j	F c k	R n l	ค่าความหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)
τ_i	0	b	c	n	$\sigma^2 + \dfrac{bcn\sum \tau_i^2}{(a-1)}$
β_j	a	0	c	n	$\sigma^2 + \dfrac{acn\sum \beta_j^2}{(b-1)}$
γ_k	a	b	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{abn\sum \gamma_k^2}{(c-1)}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	c	n	$\sigma^2 + \dfrac{cn\sum\sum(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	b	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{bn\sum\sum(\tau\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	0	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{an\sum\sum(\beta\gamma)_{ik}^2}{(b-1)(c-1)}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	0	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{n\sum\sum\sum(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$
$e_{(ijk)}l$	1	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 5 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัยที่เป็นปัจจัยสุ่ม

ตาราง 2.16 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัยที่เป็นปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบ	R a i	R b j	R n k	ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)
τ_i	1	b	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_{\beta}$
$(\tau\beta)_{ij}$	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta}$
$e_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 6 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย ที่เป็นปัจจัยสุ่ม

ตาราง 2.17 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัยที่เป็นปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบ	R a i	R b j	R c k	R n l	ค่าความหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)
τ_i	1	b	c	n	$\sigma^2 + cn\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bcn\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	1	c	n	$\sigma^2 + cn\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + acn\sigma^2_{\beta}$
γ_k	a	b	1	n	$\sigma^2 + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + an\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + abcn\sigma^2_{\gamma}$
$(\tau\beta)_{ij}$	1	1	c	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	1	b	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + an\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	1	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$
$e_{(ijk)l}$	1	1	1	1	σ^2