บทที่ 7
สถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์
(Nonparametric Statistics)

สถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ไม่มีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับประชากร แต่มีแนวทางการเลือกใช้ดังนี้

1. การทดสอบสมมติฐานจะไม่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของประชากร เช่น การทดสอบไคสแควจะใช้ทดสอบเกี่ยวกับ ภาวะสารรูปสนิทดี (goodness of fit) ความเป็นอิสระ (independence) และความเป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน (homogeneous)
2. ใช้ทดสอบสมมติฐานเมื่อไม่ทราบการแจกแจงของประชากร
3. การคำนวณง่ายและรวดเร็วกว่าสถิติพาราเมตริก แต่ไม่ใช่เกณฑ์ในการเลือกใช้สถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์
4. ใช้เมื่อข้อมูลเป็นแบบลำดับ หรือแบ่งเป็นพวก ๆ

1. การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (The sign Test)

1.1 การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test)

เมื่อใช้สถิติทดสอบ t (t – test) ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ

1. สมมติฐานสูญ เกี่ยวกับ ค่าเฉลี่ยของประชากรเท่ากับค่าที่กำหนดให้บางค่า หรือ
2. สมมติฐานสูญ เกี่ยวกับ ค่าเฉลี่ยของความแตกต่างระหว่างข้อมูล 2 ชุด ซึ่งสัมพันธ์กันเท่ากับศูนย์

การทดสอบสมมติฐานข้างต้น มีข้อตกลงเบื้องต้นว่าประชากรต้องมีการแจกแจงแบบปกติ ถ้าประชากรมีการแจกแจงไม่เป็นแบบปกติ หรือข้อมูลมีลักษณะเป็นลำดับสามารถใช้การทดสอบที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ซึ่งไม่ขึ้นกับข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบ t คือ sign test การทดสอบนี้สนใจค่ามัธยฐานมากกว่าค่าเฉลี่ย ซึ่งค่ามัธยฐานและค่าเฉลี่ยจะเท่ากันได้ถ้าการแจกแจงสมมาตร มีข้อตกลงเบื้องต้นเพียงข้อเดียวของการทดสอบนี้คือ การแจกแจงของตัวแปรที่สนใจเป็นแบบต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 1 การศึกษาผลของการดูแลเป็นพิเศษสำหรับเด็กหญิงที่สมองช้าที่มีต่อการพัฒนาพฤติกรรม ทำการทดลองโดยสุ่มเด็กหญิงสมองช้าจากโรงเรียนสำหรับสมองช้ามา 10 คน แล้วให้การดูแลเป็นพิเศษเป็นเวลา 2 สัปดาห์ หลังจากนั้นให้พยาบาลและนักสังคมสงเคราะห์ ให้คะแนนพฤติกรรมสำหรับเด็กหญิงทั้ง 10 คน คะแนนเต็มเท่ากับ 10 คะแนน ได้คะแนนดังตารางที่ 6.1

คะแนนที่ให้เป็นคะแนนอันดับ (ordinal scale) เท่านั้น ตัวอย่างเช่นคะแนน 8 หมายความว่าพฤติกรรมดีกว่าคะแนน 6 แต่ไม่ได้หมายความว่า คะแนน 6 กับ 8 มีความแตกต่างเท่ากับคะแนนระหว่าง 8 กับ 10 หรือความแตกต่างระหว่างคะแนน 6 กับ 8 ไม่ได้คิดเป็น 2 เท่าของความแตกต่างระหว่างคะแนน 5 กับ 6 สามารถสรุปได้หรือไม่ว่าคะแนนมัธยฐานของประชากรจากตัวอย่างที่สุ่มได้ไม่เท่ากับ 5

ตาราง 6.1 คะแนนพฤติกรรมของเด็กหญิงสมองช้า 10 คน

เด็กหญิง	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
คะแนน	4	5	8	8	9	6	10	7	6	6

วิธีทำ

1. ข้อตกลงเบื้องต้น คือ ประชากรเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง

2. สมมติฐานทางสถิติ คือ

   H_O : มัธยฐานของประชากรเท่ากับ 5 VS H_1 : มัธยฐานของประชากรไม่เท่ากับ 5

   กำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

   สมมติฐานแย้งที่เป็นไปได้ คือ

   $H_1 : P(+) > P(-)$

   $H_1 : P(+) < P(-)$

   $H_1 : P(+) \neq P(-)$

3. สถิติทดสอบ

   ขั้นแรกกำหนดเครื่องหมายให้คะแนนพฤติกรรมของเด็กหญิงทั้ง 10 คน เทียบกับมัธยฐานที่กำหนดคือ 5 ถ้าคะแนนมากกว่ามัธยฐานให้เครื่องหมายบวก ถ้าคะแนนน้อยกว่ามัธยฐานให้เครื่องหมายลบ ได้ผลดังตาราง 6.2

ตาราง 6.2 เครื่องหมายของคะแนนพฤติกรรม เทียบกับมัธยฐานที่กำหนด

เด็กหญิงคนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
คะแนนเทียบกับมัธยฐาน	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+

ต้องการทดสอบสมมติฐานทางสถิติคือ H_O : $P(+) = P(-) = .5$ เป็นการทดสอบว่ามีจำนวนเครื่องหมายบวกและลบเท่ากัน

การคำนวณโดยปกติจะกำจัดเลขศูนย์ออกไปจากการวิเคราะห์และลด n ลงตามจำนวนศูนย์ ทำให้ n เหลือ 9 คน และมีเครื่องหมายบวก 8 ตัว เครื่องหมายลบ 1 ตัว

สถิติทดสอบคือจำนวนเครื่องหมายลบ หรือจำนวนเครื่องหมายบวกตัวที่น้อยกว่า สำหรับตัวอย่างนี้คือจำนวนเครื่องหมายลบ กำหนดให้ k คือจำนวนเครื่องหมายลบ

4. การแจกแจงของสถิติทดสอบ

เนื่องจากมีตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน n คนจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลี ที่มีพารามิเตอร์ p ความน่าจะเป็นของค่าสังเกต x หรือจำนวนเครื่องหมายลบ คือ

$$P(k \leq x \mid n, p) \quad = \quad \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

ถ้าให้ k เป็นสถิติทดสอบจะได้การแจกแจงของ k เป็นแบบไบโนเมียลที่มีพารามิเตอร์ $p = .5$ คำนวณค่าความน่าจะเป็น $P(k \leq 1|9,.5)$

$$\begin{aligned} P(k \leq x \mid n, p) &= \binom{9}{0} (.5)^0 (.5)^{9-0} + \binom{9}{1} (.5)^1 + (.5)^{9-1} \\ &= .00195 + .01758 \\ &= .0195 \end{aligned}$$

5. กฎการตัดสินใจ

กฎการตัดสินใจที่สมมติฐานแย้งแตกต่างกัน 3 แบบ คือ

สำหรับสมมติฐานแย้ง $H_1 : P(+) > P(-)$ เราตัดสินใจปฏิเสธ H_O ถ้า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเครื่องหมายลบน้อยกว่าหรือเท่ากับ α

สำหรับสมมติฐานแย้ง $H_1 : P(+) < P(-)$ เราตัดสินใจปฏิเสธ H_O ถ้าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเครื่องหมายบวกน้อยกว่าหรือเท่ากับ α

สำหรับสมมิตฐานแย้ง $H_1 : P(+) \neq P(-)$ เราตัดสินใจปฏิเสธ H_O ถ้าความน่าจะเป็นที่จะเกิดไม่ว่าเครื่องหมายบวกหรือลบน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{\alpha}{2}$

6. การตัดสินใจ

สำหรับการทดสอบสองทางไม่ว่าจะเกิดกรณีจำนวนเครื่องหมายลบน้อยหรือจำนวนเครื่องหมายบวกน้อย ก็ตามจะปฏิเสธสมมติฐานสูญ จากตัวอย่างมีเครื่องหมายลบน้อย ที่ $\alpha = .05$

เราสามารถบอกได้ว่าถ้าจำนวนเครื่องหมายลบน้อยมากคือ ความน่าจะเป็นที่จะได้เครื่องหมายลบน้อยกว่า .025 เราจะปฏิเสธ H_O เนื่องจากความน่าจะเป็นที่จะเกิดเครื่องหมายลบคำนวณได้เท่ากับ .0195 น้อยกว่า .025 เราจึงตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐานสูญ

7. สรุปผลได้ว่า คะแนนมัธยฐานไม่เท่ากับ 5 โดยมีค่า p – value สำหรับการทดสอบเท่ากับ 2(.0195) = .0390

1.2 การทดสอบเครื่องหมายเมื่อมีข้อมูลเป็นแบบจับคู่ (Sign Test - Paired Data)

เมื่อมีข้อมูลที่จับคู่กัน และไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบ t หรือเสกลการวัดเป็นแบบอันดับ ก็สามารถใช้ sign test ในการทดสอบสมมติฐานสูญเกี่ยวกับความแตกต่างของค่ามัธยฐานเท่ากับ 0 โดยมีสมมติฐานแย้งคือ

$$H_1 : P(X_i > Y_i) = P(X_i < Y_i) = .5$$

จากคะแนนที่จับคู่กัน 1 คู่ ให้ Y_i ลบออกจาก X_i ถ้า Y_i น้อยกว่า X_i จะได้เครื่องหมาย + และถ้า Y_i มากกว่า X_i จะได้เครื่องหมาย – ถ้าความแตกต่างของมัธยฐานเท่ากับ 0 เราคาดว่าจะมีจำนวนเครื่องหมาย + เท่ากับจำนวนเครื่องหมาย – เราสามารถเขียนสมมติฐานสูญได้ว่า

$$H_O : P(+) = P(-) = .5$$

ในตัวอย่างสุ่มของข้อมูลที่จับคู่กัน เราคาดว่าจำนวนเครื่องหมาย + และ – เท่ากัน เครื่องหมาย + หรือ – มากกว่า จะเกิดขึ้นได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้น เมื่อสมมติฐานสูญปีนจริง

ตัวอย่างที่ 2 ทีมหมอฟันอยากทราบว่า การสอนประชาชนเกี่ยวกับการแปรงฟันได้ผลหรือไม่ กลุ่มตัวอย่างคือคนไข้ในคลินิกฟันจำนวน 12 คู่ จับคู่กันด้วยปัจจัยด้าน อายุ เพศ ความฉลาดและคะแนนตั้งต้นเกี่ยวกับความสะอาดของช่องปาก สมาชิกคนหนึ่งของแต่ละคู่จะได้รับการสอนเกี่ยวกับการแปรงฟันและการรักษาความสะอาดของช่องปาก หลังจากนั้น 6 เดือนทำการตรวจและให้คะแนนความสะอาดของช่องปากตัวอย่างคนไข้ทั้ง 24 คน คะแนนน้อยหมายความว่ามีความสะอาดในช่องปากมาก ได้เครื่องหมายของความแตกต่างของคะแนนความสะอาดของตัวอย่างทั้ง 12 คู่ ดังตาราง 6.3

ตาราง 6.3 เครื่องหมายของความแตกต่าง $(x_i - y_i)$ ของคะแนนความสะอาดในช่องปากของตัวอย่าง 12 คู่ คนไข้โดย x_i คือคะแนนของคนที่ได้รับการสอน และ y_i คือคะแนนของคนที่ไม่ได้รับการสอน

คู่ที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ความแตกต่างของคะแนน	−	0	−	+	−	−	−	−	−	−	+	−

วิธีทำ

1. ข้อตกลงเบื้องต้นคือ ประชากรเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง
2. สมมติฐานทางสถิติคือ การสอนวิธีแปรงฟันและรักษาความสะอาดช่องปากได้ผล จะได้ความแตกต่างของคะแนน $x_i - y_i$ เป็นเครื่องหมาย − มากกว่า + แต่ถ้าการสอนไม่ได้ผล ค่ามัธยฐานของคะแนนของประชากรเท่ากับ 0 เขียนสมมติฐานทางสถิติได้ดังนี้

H_O : มัธยฐานของความแตกต่างเท่ากับ 0 หรือ $[P(+) = P(-)]$

H_1 : มัธยฐานของความแตกต่างเป็นลบ หรือ $[P(+) < P(-)]$

กำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

3. สถิติทดสอบคือ จำนวนเครื่องหมาย + ซึ่งมีจำนวนน้อยกว่าเครื่องหมาย −

คำนวณสถิติทดสอบ k กำหนดให้ k คือ จำนวนเครื่องหมาย +

4. การแจกแจงของสถิติทดสอบ คือการแจกแจงของตัวอย่างของ k เป็นการแจกแจงแบบไบโนเมียลมีพารามิเตอร์ p = .5 ถ้า H_O เป็นจริง
5. กฎการตัดสินใจ คือ เราจะตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ถ้าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเครื่องหมาย + น้อยกว่าหรือเท่ากับ α ปฏิเสธ H_O ถ้า $P(k \leq 2 | 11, .5) \leq .05$
6. การตัดสินใจ

จากตารางเครื่องหมายของความแตกต่าง $(x_i - y_i)$ มี 0 จำนวน 1 คู่ มีเครื่องหมาย + จำนวน 2 คู่ และมีเครื่องหมาย − จำนวน 9 คู่ เราจะตัด 0 ออกไป และลด n ลงเหลือ 11 คู่ และ $k = 2$

การตัดสินใจทางสถิติ เราต้องการทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิดเครื่องหมาย + ไม่มากกว่า 2 จากตัวอย่าง 11 คู่ เมื่อสมมติฐานสูญเป็นจริง คำนวณความน่าจะเป็นจากการแจกแจงแบบไบโนเมียลคือ

$$P(k \leq 2 \mid n = 11, p = .5) = \sum_{k=0}^{2} \binom{11}{k} (.5)^k (.5)^{11-k}$$

เปิดตาราง Cumulative Binomial Probability Distribution ได้ความน่าจะเป็นเท่ากับ .0327 ซึ่งน้อยกว่า .05 ดังนั้นจึงตัดสินใจปฏิเสธ H_O

7. สรุปผลได้ว่ามัธยฐานของความแตกต่างของคะแนนความสะอาดในช่องปากของกลุ่มตัวอย่างเป็นลบ

2. การทดสอบวิลคอกซัน (The Wilcoxon Signed - Rank Test for Location)

บางครั้งเราต้องการทดสอบสมมติฐานสูญเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร แต่มีเหตุผลบางอย่างที่ไม่สามารถใช้การทดสอบ Z หรือ t เช่นถ้ากลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กคือ $n < 30$ จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบไม่ปกติ เราจึงต้องมองหาสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ที่เหมาะสม เช่น การทดสอบเครื่องหมาย ใช้กับข้อมูลที่มีตัวอย่างกลุ่มเดียวหรือเมื่อมีข้อมูลเป็นแบบจับคู่ แต่ถ้าข้อมูลมีเสกลแบบช่วง (interval scale) ขึ้นไป สถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ที่เหมาะสมคือ การทดสอบวิลคอกซัน

2.1 ข้อตกลงเบื้องต้น

ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับข้อมูลคือ

1. ตัวอย่างได้มาโดยการสุ่ม
2. ตัวแปรที่สนใจศึกษาเป็นแบบต่อเนื่อง
3. การแจกแจงของประชากรเป็นแบบสมมาตรตรงค่าเฉลี่ย μ
4. สเกลของการวัดอย่างน้อยที่สุดเป็นแบบช่วง

2.2 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติสามารถทดสอบได้ 3 แบบ คือ

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ VS $H_1 : \mu \neq \mu_0$
2. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ VS $H_1 : \mu < \mu_0$
3. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ VS $H_1 : \mu > \mu_0$

2.3 ขั้นตอนการคำนวณ

1. คำนวณค่าความแตกต่างของค่าสังเกตแต่ละตัว x_i กับค่าเฉลี่ย μ_0 คือ

$$d_i = x_i - \mu_0$$

ถ้า $d_i = 0$ เอาค่าสังเกตตัวนั้นออกและลด n ลงตามจำนวนศูนย์

2. เรียงลำดับ d_i จากน้อยที่สุดไปมากที่สุดโดยไม่สนใจเครื่องหมาย ถ้า $|d_i|$ มีค่าเท่ากันหลายตัวให้หาค่าเฉลี่ยของอันดับเป็นอันดับเฉลี่ย ตัวอย่างเช่น มี $|d_i|$ ที่มีค่าน้อยที่สุด 3 ตัว ให้อันดับที่เป็น 1, 2 และ 3 คำนวณหาอันดับเฉลี่ยได้เท่ากับ $(1 + 2 + 3) / 3 = 2$ ให้ค่าที่น้อยที่สุด 3 ตัวนั้นมีอันดับเป็น 2 ทุกตัว

3. ให้แต่ละอันดับมีเครื่องหมายของ d_i

4. หา T_+ คือผลบวกของอันดับที่มีเครื่องหมายบวก

T_- คือผลบวกของอันดับที่มีเครื่องหมายลบ

2.4 สถิติทดสอบ

สถิติทดสอบวิลค็อกซัน คือ T_+ หรือ T_- ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของสมมติฐานแย้ง ถ้าสมมติฐานสูญเป็นจริง นั่นคือ ถ้าค่าเฉลี่ยของประชากรมีค่าเท่ากับค่าที่คาดหวังและเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น ค่าคาดหวังของ T_+ เท่ากับค่าคาดหวังของ T_-

สำหรับ $H_0 : \mu = \mu_0$ VS $H_1 : \mu \neq \mu_0$ สถิติทดสอบคือ T_+ หรือ T_- ตัวที่มีค่าเล็กกว่า

สำหรับ $H_0 : \mu \geq \mu_0$ VS $H_1 : \mu < \mu_0$ สถิติทดสอบคือ T_+

สำหรับ $H_0 : \mu \leq \mu_0$ VS $H_1 : \mu > \mu_0$ สถิติทดสอบคือ T_-

ค่าวิกฤติของสถิติทดสอบวิลค็อกซันเปิดจากตาราง Probability Levels for the Wilcoxon Signed Rank Test

2.5 กฎการตัดสินใจ

กฎการตัดสินใจที่สมมติฐานแย้งแตกต่างกัน 3 แบบ คือ

สำหรับสมมติฐานแย้ง $H_1 : \mu \neq \mu_0$ เราตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้าค่า T ที่คำนวณได้น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติ T ที่เปิดจากตาราง Probability Levels for the Wilcoxon Signed Rank Test ที่ตัวอย่างขนาด n และที่ความน่าจะเป็น $\frac{\alpha}{2}$

สำหรับสมมติฐานแย้ง $H_1 : \mu < \mu_0$ เราตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า T_+ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติ T ที่เปิดจากตาราง ที่ตัวอย่างขนาด n และที่ความน่าจะเป็น α

สำหรับสมมติฐานแย้ง $H_1 : \mu > \mu_0$ เราตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า T_- น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติ T ที่เปิดจากตาราง ที่ตัวอย่างขนาด n และที่ความน่าจะเป็น α

ตัวอย่างที่ 3 การศึกษาคนไข้ที่เป็น post cardiac โดยสุ่มคนไข้มาเป็นตัวอย่าง 15 คน แล้ววัดค่า cardiac (ลิตร / นาที) ได้ข้อมูลดังนี้

4.91	4.10	6.74	7.27	7.42	7.50	6.56	4.64
5.98	3.14	3.23	5.80	6.17	5.39	5.77	

ต้องการทราบว่าค่าเฉลี่ยของประชากรแตกต่างจาก 5.05 หรือไม่

วิธีทำ

1. สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \mu = 5.05 \quad VS \quad H_1 : \mu \neq 5.05$$

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

2. สถิติทดสอบคือ T_+ หรือ T_- ตัวที่มีค่าเล็กกว่า
3. ค่าวิกฤติของสถิติทดสอบเปิดจากตาราง Probability Levels for the Wilcoxon Signed Rank Test
4. กฎการตัดสินใจคือ เราจะปฏิเสธ H_0 ถ้าค่า T ที่คำนวณได้น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าวิกฤติที่เปิดจากตารางที่จำนวนตัวอย่าง $n = 15$ และ $\frac{\alpha}{2} = 0.0240$ ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้ที่สุดกับค่า 0.0250 ในตารางได้ค่า $T = 25$
5. คำนวณค่าสถิติทดสอบของตัวอย่าง ดังแสดงในตาราง 6.4
6. เนื่องจากค่า T ที่คำนวณได้เท่ากับ 34 มากกว่าค่าวิกฤติ T ที่เปิดจากตารางเท่ากับ 25 ดังนั้นจึงตัดสินใจยอมรับ H_0
7. สรุปผลคือ ค่าเฉลี่ยของประชากรเท่ากับ 5.05

ตาราง 6.4 การคำนวณค่าสถิติทดสอบของตัวอย่าง

Cardiac Output	$d_i = x_i - 5.05$	ลำดับที่ของ d_i	เครื่องหมายลำดับที่ของ d_i
4.91	−.14	1	−1
4.10	−.95	7	−7
6.74	+1.69	10	+10
7.27	+2.22	13	+13
7.42	+2.37	14	+14
7.50	+2.45	15	+15
6.56	+1.51	9	+9
4.64	−.41	3	−3
5.98	+.93	6	+6
3.14	−1.91	12	−12
3.23	−1.82	11	−11
5.80	+.75	5	+5
6.17	+1.12	8	+8
5.39	+.34	2	+2
5.77	+.72	4	+4

$T_+ = 86, \ T_- = 34$

ค่าวิกฤติ T คือ T_+ หรือ T_- ตัวที่มีค่าเล็กกว่าในตัวอย่างนี้คือ T_-

3. สถิติแมนวิทเนย์ (The Mann - Whitney Test)

3.1 ข้อตกลงเบื้องต้น

1. กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ที่มีขนาด n และ m ตามลำดับ เป็นอิสระกัน และสุ่มมาจากประชากรแต่ละกลุ่ม
2. สเกลของการวัดอย่างน้อยที่สุดเป็นแบบอันดับ (ordinal scale)
3. ตัวแปรที่สนใจศึกษาเป็นแบบต่อเนื่อง

3.2 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติต้องการทดสอบเกี่ยวกับมัธยฐานของประชากร 2 ประชากร ถ้าแต่ละประชากรมีการแจกแจงเป็นแบบสมมาตร ค่าเฉลี่ยและมัธยฐานเป็นค่าเดียวกัน ดังนั้นการทดสอบมัธยฐานของ 2 ประชากร ก็สามารถประยุกต์เป็นการทดสอบค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรได้ด้วย สมมติฐานทางสถิติสามารถทดสอบได้ 3 แบบ คือ

1. $H_0 \; : \; M_X \geq M_Y$ VS $H_1 \; : \; M_X < M_Y$
2. $H_0 \; : \; M_X \leq M_Y$ VS $H_1 \; : \; M_X > M_Y$
3. $H_0 \; : \; M_X = M_Y$ VS $H_1 \; : \; M_X \neq M_Y$

3.3 สถิติทดสอบ

คำนวณค่าสถิติทดสอบโดยรวมกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม แล้วให้อันดับจากค่าที่น้อยที่สุดเรียงไปค่าที่มากที่สุด และหาค่าเฉลี่ยของอันดับสำหรับตัวอย่างที่มีค่าเท่ากันหลายค่า สถิติทดสอบคือ

$$T = S - \frac{n(n+1)}{2}$$

เมื่อ n คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง X

S คือ ผลบวกของอันดับของตัวอย่างจากประชากรของค่า X การเลือกกลุ่มตัวอย่างกลุ่มใดเป็นกลุ่ม X เป็นไปตามอำเภอใจ

ค่าวิกฤติ เปิดจากตาราง Quantiles of the Mann - Whitney Test Statistic ที่ระดับนัยสำคัญ α คือ w_α ที่จำนวนตัวอย่าง X เท่ากับ n และจำนวนตัวอย่าง Y เท่ากับ m

3.4 กฎการตัดสินใจ

กฎการตัดสินใจที่สมมติฐานแย้งแตกต่างกัน 3 แบบคือ

1. ปฏิเสธ H_0 : $M_X \geq M_Y$ ถ้าค่า T ที่คำนวณได้น้อยกว่า w_α
2. ปฏิเสธ H_0 : $M_X \leq M_Y$ ถ้าค่า T ที่คำนวณได้มากกว่า $w_{1-\alpha}$ เมื่อ $w_{1-\alpha} = nm - w_\alpha$
3. ปฏิเสธ H_0 : $M_X = M_Y$ ถ้าค่า T ที่คำนวณได้น้อยกว่า $w_{\alpha/2}$ หรือมากกว่า $w_{1-\alpha/2}$ เมื่อ $w_{1-\alpha/2} = nm - w_{\alpha/2}$

ตัวอย่างที่ 4 การศึกษาอิทธิพลของ prolonged inhalation ของ cadmium oxide ต่อระดับฮีโมโกลบิน ทำการทดลองกับสัตว์ทดลอง 2 กลุ่ม ให้กลุ่มหนึ่งเป็นคอนโทรล ตัวแปรที่สนใจศึกษาคือระดับของฮีโมโกลบิน

ตาราง 6.5 ข้อมูล Hemoglobin Determinations (Grams) ของสัตว์ทดลอง 25 ตัว

Exposed Animals (X)	Unexposed Animals (Y)
14.4	17.4
14.2	16.2
13.8	17.1
16.5	17.5
14.1	15.0
16.6	16.0
15.9	16.9
15.6	15.0
14.1	16.3
15.3	16.8
15.7	
16.7	
13.7	
15.3	
14.0	

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : M_X \geq M_Y \text{ VS } H_1 : M_X < M_Y$$

คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$T = S - \frac{n(n+1)}{2}$$

ตาราง 6.6 ข้อมูลและอันดับของระดับฮีโมโกลบิน

X	อันดับที่	Y	อันดับที่
13.7	1		
13.8	2		
14.0	3		
14.1	4.5		
14.1	4.5		
14.2	6		
14.4	7		
		15.0	8.5
		15.0	8.5
15.3	10.5		
15.3	10.5		
15.6	12		
15.7	13		
15.9	14		
		16.0	15
		16.2	16
		16.3	17
16.5	18		
16.6	19		
16.7	20		
	145	16.8	21
		16.9	22
		17.1	23
		17.4	24
		17.5	25

$$T = 145 - \frac{15\left(15+1\right)}{2} = 25$$

ค่าวิกฤติเปิดจากตาราง Quantiles of the Mann – Whitney Test Statistic ที่ $n = 15$, $m = 10$ และ $\alpha = .05$ ได้ค่าวิกฤติ $w_{\alpha} = 45$

ตัดสินใจปฏิเสธ H_0 เนื่องจาก T ที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าวิกฤติ w_{α}

สรุปผลได้ว่า M_X น้อยกว่า M_Y นั่นคือ prolonged inhalation ของ cadmium oxide ทำให้ระดับฮีโมโกลบินลดลง

4. การทดสอบภาวะสารรูปสนิทดี (Goodness of Fit Test)

การทดสอบภาวะสารรูปสนิทดีโดยวิธี The Kolmogorov - Smirnov Goodness of Fit Test เป็นวิธีการเปรียบเทียบฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่างกับฟังก์ชันการแจกแจงทางทฤษฎีบางทฤษฎีว่าตรงกันหรือไม่ โดยที่ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$F(x) = P(X \leq x)$$

กำหนดให้ $F_T(x)$ คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางทฤษฎี

$F_S(x)$ คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่าง

4.1 ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ตัวอย่างได้มาจากการสุ่ม
2. $F_T(x)$ มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

4.2 สมมติฐานทางสถิติ

ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่างใกล้เคียงกับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางทฤษฎีก็จะยอมรับสมมติฐานทางสถิติที่ว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางทฤษฎี $F_T(x)$ แต่ถ้ามีความแตกต่างกันระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่างกับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางทฤษฎี ก็จะปฏิเสธสมมติฐานสูญ สำหรับการทดสอบแบบสองทาง สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

H_O : $F(x) = F_T(x)$ สำหรับทุก x เมื่อ $-\infty < x < \infty$

H_1 : $F(x) \neq F_T(x)$ สำหรับ x อย่างน้อย 1 ตัว

4.3 สถิติทดสอบ

ความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางทฤษฎีกับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่างวัดได้ด้วยค่าสถิติ D ซึ่งคือระยะที่ห่างที่สุดระหว่าง $F_S(x)$ และ $F_T(x)$ สถิติทดสอบคือ

$$D = \sup_{x} | F_S(x) - F_T(x) | n$$

อ่านว่า D เท่ากับซูพรีมัมบน x ทั้งหมดของค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่าง $F_S(x) - F_T(x)$

4.4 กฎการตัดสินใจ

กฎการตัดสินใจคือเราจะปฏิเสธ H_O ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้าค่าสถิติ D มากกว่าค่าที่ได้จากตาราง Quantiles of the Kolmogorov Test Statistic สำหรับ $1 - \alpha$ การทดสอบสองทาง และขนาดตัวอย่าง n

ตัวอย่างที่ 5 วัด Fasting Blood Glucose ที่เป็น Nonobese จากผู้ชายที่มีสุขภาพดี 36 คน ต้องการสรุปว่าข้อมูลนี้มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 80 และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 หรือไม่

วิธีทำ

1. ข้อตกลงเบื้องต้นคือ ตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง
2. สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

H_O : $F(x) = F_T(x)$ สำหรับทุก x เมื่อ $-\infty < x < \infty$

H_1 : $F(x) \neq F_T(x)$ สำหรับ x อย่างน้อย 1 ตัว

กำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

3. สถิติทดสอบคือ

$$D = \sup_x | F_S(x) - F_T(x) | n$$

ค่าวิกฤติของสถิติทดสอบได้จากการเปิดตาราง Quantiles of the Kolmogorov Test Statistic

4. กฎการตัดสินใจสำหรับการทดสอบสองทาง เราจะปฏิเสธ H_O ถ้าค่าสถิติ D ที่คำนวณได้มากกว่าค่าวิกฤติที่เปิดจากตารางเท่ากับ .221 สำหรับ $n = 36$ และ $\alpha = .05$

5. การคำนวณค่าสถิติทดสอบ

ตารางข้อมูลคือค่า Fasting Blood Glucose วัดเป็น mg/100 ml ของผู้ชาย 36 คนที่เป็น Nonobese แต่ดูเหมือนว่ามีสุขภาพดี

ตาราง 6.7 ข้อมูล Fasting Blood Glucose values (mg/100 ml) ของผู้ชาย 36 คน ที่เป็น Nonobese

75	92	80	80	84	72
84	77	81	77	75	81
80	92	72	77	78	76
77	86	77	92	80	78
68	78	92	68	80	81
87	76	80	87	77	86

ขั้นแรกคำนวณค่า $F_S(x)$ โดยการหารความถี่สะสมด้วยขนาดของตัวอย่าง ตัวอย่างเช่นค่าแรกที่ x = 68

$$F_S(x) = \frac{2}{36} = .0556$$

ตาราง 6.8 คำนวณค่า $F_S(x)$

x	ความถี่	ความถี่สะสม	$F_S(x)$
68	2	2	.0556
72	2	4	.1111
75	2	6	.1667
76	2	8	.2222
77	6	14	.3889
78	3	17	.4722
80	6	23	.6389
81	3	26	.7222
84	2	28	.7778
86	2	30	.8333
87	2	32	.8889
92	4	36	1.0000
	36		

ขั้นต่อไปคำนวณหาค่า $F_T(x)$ โดยแปลงค่า x เป็นค่าปกติมาตรฐานจากสูตร

$$Z = \frac{(x - \bar{x})}{sd}$$

และคำนวณค่า $F_T(x)$ โดยเปิดจากตาราง Normal Curve Areas หาพื้นที่ใต้โค้งปกติที่ค่า Z ต่าง ๆ ได้ดังตาราง 6.9

ตาราง 6.9 คำนวณค่า $F_T(x)$

x	z = (x − 80)/6	$F_T(x)$
68	−2.00	.0228
72	−1.33	.0918
75	−.83	.2033
76	−.67	.2514
77	−.50	.3085
78	−.33	.3707
80	.00	.5000
81	.17	.5675
84	.67	.7486
86	1.00	.8413
87	1.17	.8790
92	2.00	.9772

ขั้นต่อไปคำนวณหาความแตกต่างระหว่าง $F_T(x)$ กับ $F_S(x)$ ดังตาราง 6.10

ตาราง 6.10 คำนวณ $|F_S(x) - F_T(x)|$

x	$F_S(x)$	$F_T(x)$	$\|F_S(x) - F_T(x)\|$
68	.0556	.0228	.0328
72	.1111	.0918	.0193
75	.1667	.2033	.0366
76	.2222	.2514	.0292
77	.3889	.3085	.0804
78	.4722	.3707	.1015
80	.6389	.5000	.1389
81	.7222	.5675	.1547
84	.7778	.7486	.0292
86	.8333	.8413	.0080
87	.8889	.8790	.0099
92	1.000	.9772	.0228

จากตารางพิจารณาทุกค่า x จะได้ $|F_S(x) - F_T(x)|$ ที่มีค่ามากที่สุดเท่ากับ .1547 กำหนดให้เป็นค่าสถิติ D

6. การตัดสินใจทางสถิติโดยการเปรียบเทียบค่าสถิติ D กับค่าวิกฤติที่เปิดจากตาราง Quantiles of the Kolmogorov Test Statistic เท่ากับ .221 ได้ว่าค่าสถิติ D น้อยกว่าค่าวิกฤติ .221 สรุปว่าไม่สามารถปฏิเสธ H_O

7. สรุปว่า ตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติตามที่คาดหวัง