บทที่ 4
การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับ
การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

ผู้ทดลองมักจะรู้พฤติกรรมอย่างหยาบ ๆ ของหน่วยทดลองที่ใช้ เช่นรู้ว่าหนูอายุน้อยตัวผู้จะอ้วนเร็วกว่าตัวเมีย เช่นเครื่องจักรทอผ้าที่ทอผ้าแตกต่างกัน 5 ชิ้น จากประสบการณ์ทำให้ทราบว่าการทอผ้าชิ้นที่ 4 และ 5 จะได้รับรอยขีดข่วนน้อยกว่าผ้าชิ้นอื่น ๆ เราสามารถใช้ความรู้เหล่านี้เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลการทดลองได้ ถ้าต้องการเปรียบเทียบทรีทเมนต์กลุ่มหนึ่ง ขั้นแรกเราจะจัดหน่วยทดลองเป็นกลุ่ม ๆ ที่มีจำนวนหน่วยทดลองในแต่ละกลุ่มเท่ากับจำนวนทรีทเมนต์มักจะเรียกว่าซ้ำ โดยที่หน่วยทดลองในแต่ละกลุ่มนั้นควรมีความคล้ายกันที่สุดเท่าที่เป็นไป แล้วทำการสุ่มแต่ละทรีทเมนต์ให้กับหน่วยทดลองหนึ่ง ๆ ในแต่ละซ้ำของการทดลอง วิธีการนี้เป็นการแยกชั้นแบบ 2 ทาง (two-way classification) เนื่องจากค่าสังเกตค่าใด ๆ ถูกแยกออกโดยทรีทเมนต์ที่ได้รับและการอยู่ในซ้ำที่ของการทดลอง

ตัวอย่างในการทดลองทางการเกษตร ผู้ทดลองจะพยายามจัดแปลงให้อยู่ในซ้ำซึ่งเป็นทางหนึ่งที่มีการให้ปุ๋ยและการให้เงื่อนไขที่ทำให้พืชเจริญเติบโตเป็นแบบเดียวกันภายในซ้ำหนึ่งของการทดลอง โดยทั่วไปแปลงที่อยู่ใกล้ ๆ กันมีแนวโน้มว่าจะให้ผลเหมือนกัน การจัดซ้ำการทดลองหนึ่งโดยทั่วไปก็คือการจัดชุดของพื้นที่ทดลอง ภายในการทดลองซ้ำหนึ่งเราจะจัดให้แปลงทดลองหนึ่งได้รับทรีทเมนต์หนึ่งอย่างสุ่ม การจัดแปลงทดลองแบบนี้เรียกว่า การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก ซึ่งซ้ำของการทดลองก็คือ บล็อกหนึ่งของพื้นที่ทดลองนั่นเอง

1. เทคนิคการบล็อก

ปัจจัยรบกวน (nuisance factor) คือ ปัจจัยที่ไม่ได้ศึกษาในการทดลอง แต่อาจมีผลกระทบต่อผลการทดลอง (response) ผู้วิจัยอาจไม่ทราบว่ามีปัจจัยนั้นอยู่ หรือผู้วิจัยอาจทราบแต่ควบคุมไม่ได้

วิธีสุ่ม (randomization) เป็นเทคนิคในการออกแบบการทดลองเพื่อป้องกันปัจจัยรบกวนที่อาจจะซ่อนอยู่ในการทดลอง บางทีเราทราบว่ามีปัจจัยรบกวนอยู่ แต่ควบคุมไม่ได้ ถ้าเราสามารถเก็บค่าได้ เราก็สามารถใช้วิธีสถิติช่วยโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (analysis of covariance)

ถ้าเราทราบว่ามีปัจจัยรบกวนและควบคุมได้ เทคนิคพิเศษของการออกแบบการทดลองจะเรียกว่าการบล็อก (blocking) เพื่อใช้ในการกำจัดหรือแยกแยะอิทธิพลของปัจจัยรบกวนออกจากความคลาดเคลื่อนของการทดลอง ทำให้ความคลาดเคลื่อนของการทดลองเล็กลง เป็นผลให้การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์มีความถูกต้องเพิ่มขึ้น บางครั้งจะใช้บล็อกในการควบคุมเงื่อนไขของการทดลองบางอย่างที่ไม่สามารถควบคุมได้โดยง่าย ซึ่งต่างจากแผนการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ (CRD) ที่ไม่มีการควบคุมความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองและเชื่อว่าหน่วยทดลองทุกหน่วยไม่แตกต่างกัน (homogeoneous) แต่ในการทดลองบางครั้งไม่สามารถหาหน่วยทดลองที่เหมือนกันทั้งหมดได้ตามต้องการ ซึ่งจะทำให้ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองเพิ่มขึ้น และทำให้ผลการทดลองมีความถูกต้องลดลง

การจัดบล็อกก็เพื่อให้หน่วยทดลองภายในบล็อกมีความสม่ำเสมอมากที่สุด และให้หน่วยทดลองที่อยู่ต่างบล็อกกันมีความแตกต่างกันมากที่สุด หน่วยทดลองภายในบล็อกจะได้รับทรีทเมนต์ต่าง ๆ โดยสุ่มจำนวนเท่ากันครบทุกทรีทเมนต์

ตัวอย่างเช่นในการทดสอบการกินอาหารของสัตว์ เราจะแบ่งสัตว์ทดลองออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามความแตกต่างของสัตว์ ดังนั้นกลุ่มสัตว์ก็คือบล็อกนั่นเอง และสัตว์ทดลองก็คือ “plot” ในการทดสอบสัตว์ทดลองเล็ก ๆ อาจใช้ครอกเป็นบล็อกได้ ในการทดสอบที่ผิวหนังบนตำแหน่งต่าง ๆ ของสัตว์ตัวหนึ่ง สัตว์แต่ละตัวก็จัดเป็นบล็อกหรืออาจเป็นพื้นที่ทดลอง (cited) สำหรับการทดลองในห้องแล็ปอาจจัดให้วันที่ทำการทดลองเป็นบล็อก

ในการทดสอบแมลงมีพิษ ระดับของการฆ่ามักจะแปรจากวันไปวัน วันอาจถูกจัดให้เป็นบล็อก ในแต่ละวันจะมีทรีทเมนต์ทั้งหมดที่เรียงลำดับกันแบบสุ่ม และก็ต้องทำการสุ่มแมลงจากสต็อกมาทำการทดลอง

หลักการจัดบล็อก

1) จัดตามลักษณะทางกายภาพหรือคุณสมบัติของหน่วยทดลองเช่น อายุ น้ำหนัก ขนาดลำต้น ขนาดสัตว์ทดลอง หรืออาจเป็นคนที่เป็นหน่วยทดลอง

2) จัดตามสภาพแวดล้อมภายนอก เช่น แหล่งของวัตถุดิบ เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงาน วันหรือช่วงเวลาที่ดำเนินการทดลอง อุณหภูมิ การจัดพื้นที่ทดลอง สภาพฝน แสงแดด ความลาดเทของพื้นที่ทดลอง การอยู่ใกล้กับแหล่งน้ำตามธรรมชาติ เป็นต้น

2. การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

เราใช้การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกเมื่อเรามีหน่วยทดลองที่จัดได้เป็นกลุ่ม ๆ ซึ่งหน่วยทดลองที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันมีลักษณะเหมือนกัน หรือใกล้เคียงกันมาก ถ้าเราให้หน่วยทดลองกลุ่มหนึ่งเป็นบล็อกหนึ่ง ผู้วิจัยออกแบบการทดลองเพื่อต้องการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรที่ได้รับทรีทเมนต์ต่าง ๆ a ประชากร หรือ a ทรีทเมนต์ ดังนั้นในการออกแบบการทดลองต้องจัดให้ในบล็อกหนึ่งมีจำนวนหน่วยทดลอง a หน่วย แต่ละหน่วยทดลองจะได้รับ ทรีทเมนต์ใด ๆ ให้เป็นไปโดยสุ่ม คือให้เป็นการสุ่มอย่างสมบูรณ์ภายในบล็อก นั่นคือหน่วยทดลองที่ 1 จะได้รับทรีทเมนต์หนึ่งเป็นอันดับอย่างสุ่ม สามารถแสดงแผนภาพการออกแบบการทดลองได้คือ

	บล็อก				
	บล็อก 1	บล็อก 2	บล็อก 3	. . .	บล็อก b
ทรีทเมนต์	Tr_4	Tr_2	Tr_1	. . .	Tr_a
	Tr_1	Tr_5	Tr_4	. . .	Tr_4
	Tr_3	Tr_1	Tr_6	. . .	Tr_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Tr_a	Tr_3	Tr_2	. . .	Tr_1

ภาพที่ 4.1 แผนภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

ตัวอย่างที่ 1 ผู้วิจัยต้องการเปรียบเทียบเครื่องดื่มที่นักวิ่งดื่มก่อนการแข่งขัน 3 ชนิด คือ A, B, และ C ว่าจะให้ผลต่อเวลาในการวิ่งแข่งขันแตกต่างกันหรือไม่ การออกแบบการทดลอง ผู้วิจัยให้หน่วยทดลองคือ นักวิ่ง แต่ใช้นักวิ่งในการทดลองนี้เพียง 5 คน เท่านั้น นักวิ่งแต่ละคนเป็นบล็อกที่มีหน่วยทดลอง 3 หน่วยทดลอง นักวิ่งแต่ละคนจะทำการทดลอง 3 ครั้ง การสุ่มทรีมเมนต์ในแต่ละบล็อกเป็นอิสระกัน ดังนั้นเราอาจให้ทรีทเมนต์ A, B, C แทนด้วยหมายเลข 1, 2, 3 แล้วใช้ตารางเลขสุ่มแบบง่าย ๆ ในการกำหนดทรีทเมนต์ให้กับนักวิ่งคนที่ 1 ถึง คนที่ 5 สมมติว่าตัวเลขในตารางเลขสุ่ม สุ่มได้ตัวเลขเริ่มต้นในแถวที่ 11 คอลัมน์ที่ 4 ดูตัวเลขไปทางด้านขวา คือ

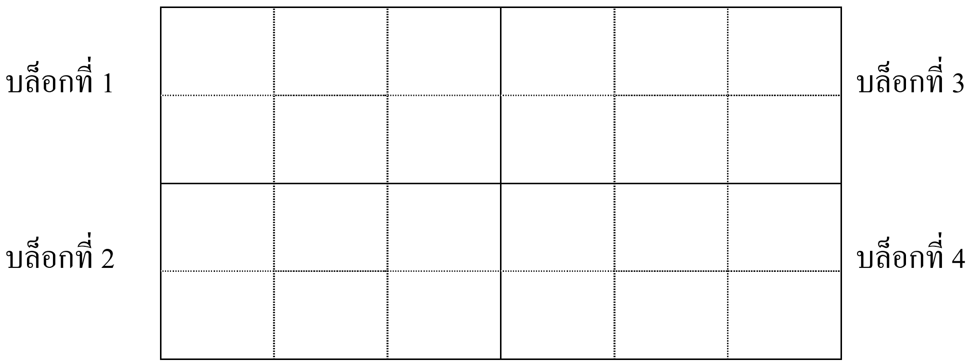
33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595
01547	85590	91610	78188	63553	40961	48235
03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847
12234	90511	33703	90322			

ได้ตัวเลขเพอมิวเตชันอย่างสุ่ม 5 ชุด สำหรับบล็อก 5 บล็อก คือ บล็อกที่ 1 (3, 2, 1) , บล็อกที่ 2 (3, 1, 2) , บล็อกที่ 3 (3, 2, 1) , บล็อกที่ 4 (2, 1, 3) และบล็อกที่ 5 (1, 3, 2) สรุปเป็นแผนภาพการออกแบบการทดลองได้ดังภาพที่ 4.2

บล็อก	อันดับของทรีทเมนต์ที่ทำการทดลอง		
นักวิ่งคนที่ 1	C	B	A
นักวิ่งคนที่ 2	C	A	B
นักวิ่งคนที่ 3	C	B	A
นักวิ่งคนที่ 4	B	A	C
นักวิ่งคนที่ 5	A	C	B

ภาพที่ 4.2 แผนภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกที่มีบล็อก 5 บล็อก และทรีทเมนต์ 3 ทรีทเมนต์

ตัวอย่างที่ 2 ผู้วิจัยต้องการเปรียบเทียบอิทธิพลของปุ๋ย 6 ชนิด ที่มีต่อการเจริญเติบโตของพืช พื้นที่ทดลองคือ แปลงพืชที่มีขนาดใหญ่มากติดต่อกันเป็นผืนสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ผู้วิจัยอาจไม่แน่ใจคุณภาพของชุดดินทั้งผืนใหญ่นั้นว่าจะมีคุณภาพเหมือนกันทั้งหมด และผู้วิจัยเชื่อว่าแปลงพืชที่อยู่ใกล้กันมากที่สุดน่าจะมีคุณภาพของชุดดินใกล้เคียงกันหรือแตกต่างกันน้อย หรือได้รับอิทธิพลจากสภาพแวดล้อมคล้าย ๆ กัน การได้รับฝน แสงแดดพอ ๆ กัน หรือช่วงเวลาที่เก็บข้อมูลทำพร้อมกันทั้งหมดภายในวันเดียวกันไม่ได้ ซึ่งความแตกต่างของสภาพแวดล้อมเหล่านี้อาจมีผลต่อการเจริญเติบโตของพืชนอกเหนือไปจากอิทธิพลของปุ๋ย ซึ่งเป็นปัจจัยที่ผู้วิจัยสนใจศึกษาเพียงปัจจัยเดียว นอกเหนือจากนั้นแปลงพืชที่อยู่ด้านริมหรือขอบมีโอกาสถูกรบกวนจากปัจจัยรบกวนอื่น ๆ ได้อีก ดังนั้นการจัดบล็อกอาจทำได้หลายรูปแบบ รูปแบบหนึ่งที่เป็นไปได้คือ แบ่งแปลงพืชทั้งหมดออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน ได้เป็น 4 บล็อก และภายในแต่ละบล็อกแบ่งออกเป็น 6 แปลงย่อย



ภาพที่ 4.3 แผนภาพการจัดบล็อกแปลงพืช

วิธีการสุ่มทรีทเมนต์ในแต่ละบล็อก ขั้นแรกกำหนดให้ทรีทเมนต์คือ ปุ๋ย มี 6 ทรีทเมนต์ คือ A, B, C, D, E, F แทนด้วยหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6 ขั้นที่สอง ใช้ตารางเลขสุ่มในการกำหนดทรีทเมนต์ให้กับแปลงย่อยแต่ละแปลง อาศัยตัวเลขในตารางเลขสุ่มจากตัวอย่างที่ 1 สร้างตัวเลขเพอมิวเตชันอย่างสุ่ม 4 ชุด สำหรับบล็อก 4 บล็อกคือ

บล็อกที่ 1 (3, 2, 6, 5, 1, 4) แทนด้วย (C, B, F, E, A, D)

บล็อกที่ 2 (5, 1, 6, 3, 4, 2) แทนด้วย (E, A, F, C, D, B)

บล็อกที่ 3 (3, 5, 4, 2, 6, 1) แทนด้วย (C, E, D, B, F, A)

บล็อกที่ 4 (6, 3, 2, 5, 1, 4) แทนด้วย (F, C, B, E, A, D)

สรุปเป็นแผนภาพการออกแบบการทดลองได้ดังภาพ

บล็อกที่ 1	C	B	F	C	E	D	บล็อกที่ 3
	E	A	D	B	F	A	
บล็อกที่ 2	E	A	F	F	C	B	บล็อกที่ 4
	C	D	B	E	A	D	

ภาพที่ 4.3 ก. แผนภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูร์ภายในบล็อกที่มี 4 บล็อก และทรีทเมนต์ 6 ทรีทเมนต์

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าพื้นที่แปลงพืชในตัวอย่างที่ 2 มีลักษณะทางกายภาพที่แตกต่างกันชัดเจน เช่น ริมด้านหนึ่งอาจอยู่ใกล้กับแหล่งน้ำธรรมชาติ การแบ่งบล็อกตามตัวอย่างที่ 2 อาจไม่เหมาะสม การแบ่งบล็อกแบบใหม่อาจทำได้ดังแผนภาพการออกแบบการทดลองในภาพที่ 4.3 ข.

บล็อกที่ 1	C	B	F	E	A	D
บล็อกที่ 2	E	A	F	C	D	B
บล็อกที่ 3	C	E	D	B	F	A
บล็อกที่ 4	F	C	B	E	A	D

แหล่งน้ำตามธรรมชาติ

ภาพที่ 4.3 ข. แผนภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกที่มี 4 บล็อก และทรีทเมนต์ 6 ทรีทเมนต์

3. การวิเคราะห์ความแปรปรวน

3.1 รูปแบบตารางข้อมูล

สมมติว่าในการทดลองหนึ่งต้องการเปรียบเทียบ a ทรีทเมนต์ และแบ่งข้อมูลออกเป็น b บล็อก ในแต่ละบล็อกมีหน่วยทดลอง 1 หน่วยที่ได้รับทรีทเมนต์หนึ่งจนครบทุกทรีทเมนต์และลำดับของการทดลองทรีทเมนต์ต่าง ๆ ในแต่ละบล็อกเป็นไปอย่างสุ่ม การสุ่มทำเฉพาะภายในบล็อกเท่านั้น บล็อกจึงแทนข้อจำกัดของการสุ่ม และมีรูปแบบของข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 รูปแบบข้อมูลของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

ทรีทเมนต์	บล็อก			
	บล็อก 1	บล็อก 2	. . .	บล็อก b
ทรีทเมนต์ 1	y_{11}	y_{12}	. . .	y_{1b}
ทรีทเมนต์ 2	y_{21}	y_{22}	. . .	y_{2b}
⋮	⋮	⋮		⋮
ทรีทเมนต์ a	y_{a1}	y_{a2}	. . .	y_{ab}

3.2 ตัวแบบสถิติของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกใช้สำหรับการทดลองที่มีหน่วยทดลองไม่เหมือนกันทั้งหมด จากการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ที่ไม่สามารถควบคุมความแตกต่างใด ๆ ที่เกิดขึ้นอย่างเป็นระบบ ซึ่งอาจแสดงอยู่ในหน่วยทดลองเหล่านั้น ความผันแปรอย่างเป็นระบบเกิดขึ้นเพียงแหล่งเดียว เราจะออกแบบการทดลองโดยการบล็อกให้ทรีทเมนต์ต่าง ๆ ปรากฏอยู่ในแต่ละบล็อก ทำให้ทุกบล็อกประกอบด้วยทรีทเมนต์ต่าง ๆ ที่เหมือนกัน เรียกว่าการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก ขั้นแรกของการวิเคราะห์ข้อมูลคือ การสร้างสมการของค่าสังเกตทุกตัว สมการนี้จะอธิบายค่าสังเกตเป็นผลบวกของเทอมต่าง ๆ 4 เทอม สามารถเขียนเป็นตัวแบบสถิติคือ

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, a \qquad j = 1, 2, \dots, b$$

เมื่อ μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมดของประชากร

τ_i คือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ i

β_j คือ อิทธิพลของบล็อกที่ j

ε_{ij} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

พิจารณาทรีทเมนต์และบล็อกเป็นปัจจัยกำหนด ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์

พารามิเตอร์ของตัวแบบสถิตินี้ได้แก่ μ , $\{\tau_i\}$, $\{\beta_j\}$ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดสามารถคำนวณได้จากสมการคือ

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

ทำให้ได้สมการปกติ (normal equations) คือ

สำหรับ $\hat{\mu}$: $-2\sum_i \sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j) = 0$

สำหรับ $\hat{\tau}_i$: $-2 \sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j) = 0$

สำหรับ $\hat{\beta}_j$: $-2 \sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j) = 0$

จากสมการปกติข้างต้น ทำให้ได้ว่า

$$G = N\hat{\mu} + b\Sigma_i \tau_i + a\Sigma_j \beta_j$$

$$= N\hat{\mu}$$

$$T_i = b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_i + \Sigma_j \hat{\beta}_j$$

$$= b(\hat{\mu} + \hat{\tau}_i) \quad \text{สำหรับแต่ละ } i = 1 \text{ ถึง } a$$

$$B_j = a\hat{\mu} + \Sigma_i \hat{\tau}_i + a\hat{\beta}_j$$

$$= a(\hat{\mu} + \hat{\beta}_j) \quad \text{สำหรับแต่ละ } j = 1 \text{ ถึง } b$$

กำหนดให้

$$G = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}$$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด

$$T_i = \sum_{j=1}^{b} y_{ij}$$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดที่ได้รับทรีทเมนต์ i

$$B_j = \sum_{i=1}^{a} y_{ij}$$ คือ ผลรวมของข้อมูลทั้งหมดในบล็อก j

ดังนั้น

$$\hat{\mu} = \frac{G}{N}$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{T_i}{b} - \frac{G}{N}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{B_j}{a} - \frac{G}{N}$$

3.4 การคำนวณผลบวกกำลังสอง

การคำนวณค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (residual sum of squares) หรือ SS_E คิดจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยการแทนค่า $\hat{\mu}$, $\{\hat{\tau}_i\}$, $\{\hat{\beta}_j\}$ ลงในสมการคือ

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} e_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y})^2$$

โดยที่ $\bar{y}_i = T_i / b$, $\bar{y}_j = B_j / a$ และ $\bar{y} = G / N$

ทำให้ได้ว่า ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่คิดจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดคือ

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \{(y_{ij} - \bar{y}) - (y_i - \bar{y}) - (y_j - \bar{y})\}^2$$

เนื่องจากเทอม cross-product ทุกเทอมเท่ากับศูนย์ ทำให้ได้ว่า

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2 + b\sum_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + a\sum_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$$

ซึ่งเราสามารถแยกแต่ละเทอมโดยอธิบายแต่ละเทอมได้ดังนี้

เทอมแรก คือ ผลบวกกำลังสองของค่าสังเกตแต่ละค่าที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด (total sum of squares) : SS_T

เทอมที่สอง คือ ผลบวกกำลังสองของค่าเฉลี่ยของแต่ละทรีทเมนต์ที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด (treatment sum of squares) : SS_{Tr}

เทอมที่สาม คือ ผลบวกกำลังสองของค่าเฉลี่ยของแต่ละบล็อกที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด (Block sum of squares) : SS_B
และเพื่อให้สะดวกในการคำนวณทำได้ดังนี้

$$SS_{Tr} = b\sum_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$= \sum_i \frac{T_i^2}{b} - \frac{G^2}{N}$$

$$SS_B = a\sum_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$$

$$= \sum_j \frac{B_j^2}{a} - \frac{G^2}{N}$$

ถ้ากำหนดให้ $S_B = \sum_j \frac{B_j^2}{a}$

$$S_{Tr} = \sum_i \frac{T_i^2}{b} \quad , \quad CT = \frac{G^2}{N} \quad , \quad S = \sum_i \sum_j y_{ij}^2$$

เราจะสามารถสรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตารางที่ 4.2 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

Source of Variation	d.f.	Sum of Square	Mean Square
บล็อก	(b - 1)	$SS_B = S_B - CT = \sum_j B_j^2 / a - G^2 / N$	$SS_B / (b - 1)$
ทรีทเมนต์	(a - 1)	$SS_{Tr} = S_{Tr} - CT = \sum_i T_i^2 / b - G^2 / N$	$SS_{Tr} / (a - 1)$
ความคลาดเคลื่อน	(a – 1)(b – 1)	SS_E = ได้จากการลบ	$SS_E / (a - 1)(b - 1)$
Total	ab - 1	$SS_T = S - CT = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - G^2 / N$	

3.5 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$ คู่กับ $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ อย่างน้อย 1 คู่ $(i \neq j)$

เมื่อ

$$\mu_i = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} (\mu + \tau_i + \beta_j)$$

$$= \mu + \tau_i$$

สมมติฐานทางสถิติสามารถเขียนในเทอมของอิทธิพลของทรีทเมนต์ได้คือ

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$

คู่กับ $H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

3.6 การคำนวณค่าคาดหวังของค่าเฉลี่ยกำลังสอง

ถ้าทรีทเมนต์และบล็อกเป็นอิทธิพลแบบกำหนด

$$E(MS_{Tr}) = \sigma^2 + \frac{b\sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + \frac{a\sum_{j=1}^{b} \beta_j^2}{b-1}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

3.7 การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ย

1) การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ต่าง ๆ

การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ต่าง ๆ ใช้สถิติทดสอบคือ

$$F_0 = \frac{MS_{Tr}}{MS_E}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ $F_{(a-1),(a-1)(b-1)}$ ถ้า H_0 จริง เขตวิกฤติคือ $F_{\alpha,a-1,(a-1)(b-1)}$ การสรุปผลการวิเคราะห์เราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $F_0 > F_{\alpha,a-1,(a-1)(b-1)}$

2) การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของบล็อก

บางครั้งอาจจะทำการทดสอบเปรียบเทียบระหว่างบล็อกเพื่อให้ทราบว่าการแบ่งบล็อกจำเป็นหรือไม่เพื่อใช้ในการพิจารณาสำหรับการทดลองครั้งต่อไป

สมมติฐานทางสถิติ คือ

$$H_0 : \beta_j = 0 \text{ คู่กับ } H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ อย่างน้อย 1 ค่า}$$

การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของบล็อกต่าง ๆ ใช้สถิติทดสอบคือ

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$$

ซึ่งมีการแจกแจง $F_{(b-1),(a-1)(b-1)}$ ถ้า H_0 จริง เขตวิกฤติ คือ $F_{\alpha,b-1,(a-1)(b-1)}$ การสรุปผลเราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $F_0 > F_{\alpha; b-1, (a-1)(b-1)}$

3.8 ตัวอย่าง

ตัวอย่าง ในการทดลองเกี่ยวกับเวลาของปฏิกิริยาโต้กลับของคนต่อแสงแฟลช ภายใต้สภาวการณ์ที่แตกต่างกัน A, B, C, D, E กำหนดให้ทรีทเมนต์คือสภาวการณ์ กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนที่ใช้เครื่องมือนี้มาแล้วก่อนหน้านี้ ซึ่งมีอายุแตกต่างกัน แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มตามอายุ กลุ่มละ 5 คน บล็อกคือกลุ่มนักเรียนแยกตามอายุ สุ่มให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มเดียวกันได้รับทรีทเมนต์ A, B, C, D, E ทรีทเมนต์ใดทรีทเมนต์หนึ่งอย่างสุ่ม แล้วเก็บข้อมูลเวลาวัดเป็น ms ได้ข้อมูลดังตาราง

ตารางที่ 4.3 ข้อมูลเวลา (ms) ของปฏิกิริยาโต้กลับของคนต่อแสงแฟลช ภายใต้สภาวการณ์ที่แตกต่างกัน

กลุ่มนักเรียน	1	2	3	4	5	ผลรวม
ทรีทเมนต์ A	213	127	155	246	200	941
ทรีทเมนต์ B	178	143	147	210	192	870
ทรีทเมนต์ C	254	151	174	266	222	1067
ทรีทเมนต์ D	103	108	122	144	161	638
ทรีทเมนต์ E	177	199	212	168	182	938
ผลรวม	925	728	810	1034	957	4454

วิธีทำ

1) คำนวณค่าผลบวกกำลังสอง

$$CT = \frac{G^2}{N}$$

$$= \frac{4454^2}{25}$$

$$= 793524.64$$

$$SS_{Total} = 839414.00 - CT$$

$$= 45889.36$$

$$SS_{Tr} = \frac{1}{5}(941^2 + \ldots + 938^2) - CT$$

$$= 813551.60 - 793524.64$$

$$= 20026.96$$

$$SS_B = \frac{1}{5}(925^2 + \ldots + 957^2) - CT$$

$$= 805342.80 - 793524.64$$

$$= 11818.16$$

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตารางที่ 4.4 การวิเคราะห์ความแปรปรวนข้อมูลเวลาของปฏิกิริยาโต้กลับของคนต่อแสงแฟลช ภายใต้สภาวการณ์ที่แตกต่างกัน

Source of variation	d.f.	Sum of squares	Mean square	F_0
บล็อก (นักเรียน)	4	11818.16	2954.54	3.37*
ทรีทเมนต์ (สภาวการณ์)	4	20026.96	5006.74	5.70**
ความคลาดเคลื่อน	16	14044.24	877.765	
Total	24	45889.36		

ผลการวิเคราะห์พบว่าค่าสถิติ F สำหรับทรีทเมนต์ มีนัยสำคัญที่ .01 สรุปได้ว่าปฏิเสธ H_0 นั่นคือค่าเฉลี่ยของเวลาอย่างน้อย 1 สภาวการณ์ที่แตกต่างจากสภาวการณ์อื่น ๆ และค่าสถิติ F สำหรับบล็อก มีนัยสำคัญที่ .05 ถ้าใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการวิเคราะห์จะได้ค่าความน่าจะเป็น (P-value) ของค่าสถิติ F ที่คำนวณได้

จะเห็นได้ว่านักเรียนแต่ละกลุ่มมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ถ้าการวิเคราะห์ไม่ได้แยกความผันแปรอย่างเป็นระบบที่เกิดจากความแตกต่างนี้ออกมาโดยเทคนิคการบล็อก คือวิเคราะห์ตามตัวแบบสถิติของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ความผันแปรเนื่องจากความแตกต่างของนักเรียนนี้จะเป็นส่วนหนึ่งของความคลาดเคลื่อน นอกจากนั้นยังทำให้ค่า s^2 เพิ่มขึ้น ซึ่งจะทำให้ไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการสุ่มที่เกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติของ $\{\varepsilon_{ij}\}$ เพราะว่าในความคลาดเคลื่อนมีความผันแปรที่เกิดขึ้นอย่างเป็นระบบนี้รวมอยู่ด้วย

การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกนี้ยังทำให้ทุกทรีทเมนต์มีจำนวนซ้ำเท่ากันด้วย เท่ากับ n

ตัวอย่าง

การทดสอบพันธ์ข้าวสาลี 5 พันธ์ ทำการทดสอบ 3 ซ้ำ ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกที่มี 3 บล็อก และมีทั้งหมด 15 แปลง แผนการสุ่มแปลงกับผลผลิตของพันธ์ A ถึง E แสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 4.5 แผนการสุ่มแปลงกับผลผลิตข้าวสาลีที่มีพันธ์แตกต่างกัน 5 พันธ์ คือ พันธ์ A ถึง E

บล็อก 1	บล็อก 2	บล็อก 3
B 20	C 28	A 33
D 18	A 30	E 26
A 28	E 23	B 28
C 29	D 16	C 30
E 20	B 26	D 19

ตารางที่ 4.6 ข้อมูลผลผลิตข้าวสาลีพันธ์ A ถึง E

พันธ์ (ทรีทเมนต์)	บล็อก			ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
	1	2	3		
A	28	30	33	91	30.3
B	20	26	28	74	24.7
C	29	28	30	87	29.0
D	18	16	19	53	17.7
E	20	23	26	69	23.0
ผลรวม	115	123	136	374	

ทดสอบความแตกต่างของผลผลิตข้าวสาลีทั้ง 5 พันธ์ ด้วยสถิติทดสอบ F-test โดยการวิเคราะห์ความแปรปรวน ได้ผลการวิเคราะห์ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 4.7 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

Source of variation	Degree of freedom	Sum of square	Mean square	F
บล็อก	2	45	22.5	
พันธ์	4	307	76.8	22.6
บล็อก X พันธ์ (Error)	8	27	3.4	
Total	14	379		

การคำนวณ

1. คำนวณค่าสถิติทดสอบ F เปรียบเทียบกับค่าวิกฤติเพื่อทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \tau_i = 0$, $H_1 : \tau_i \neq 0$

1.1 คำนวณค่าผลบวกกำลังสอง

- คำนวณค่า corrected term $= \dfrac{374^2}{15}$

- คำนวณ SS_{Total} $= 28^2 + 20^2 + ... + 26^2 - CT$

$$= 9704 - 9325$$

$$= 379$$

- คำนวณ $SS_{บล็อก}$ $= \frac{115^2}{5} + \frac{123^2}{5} + \frac{136^2}{5} - CT$

$$= 45$$

- คำนวณ $SS_{พันธ์}$ $= \frac{91^2}{3} + \frac{74^2}{3} + ... + \frac{69^2}{3} - CT$

$$= 307$$

- คำนวณ $SS_{บล็อก \times พันธ์}$ $= SS_{Total} - SS_{บล็อก} - SS_{พันธ์}$

$$= 379 - 45 - 307$$

$$= 27$$

1.2 คำนวณค่า Mean square = ss / df

1.3 คำนวณค่าสถิติ $F_0 = \frac{MS_{พันธ์}}{MSE} = \frac{76.8}{3.4} = 22.6$

ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ 4 และ 8

1.4 เปรียบเทียบค่า F_0 กับค่าวิกฤติ $F_{.05;\,4,\,8} = 3.84$

ค่าวิกฤติ $F_{.01;\,4,\,8} = 7.01$ พบว่าค่า F ที่คำนวณได้มากกว่าค่าวิกฤต จึงสรุปว่าปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ผลผลิตข้าวสาลีทั้ง 5 พันธ์มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .01

2. เปรียบเทียบผลผลิตข้าวสาลีทั้ง 5 พันธ์ที่ละคู่ โดยวิธี Least Significant Different

2.1 คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของข้าวสาลี 2 พันธ์ คือ

$$se = \sqrt{3.4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)}$$

$$= 1.5$$

2.2 คำนวณค่า lsd

$$\begin{aligned} lsd &= se \times t_{.025,8} \\ &= 15 \times 2.3 \\ &= 3.45 \end{aligned}$$

2.3 พบว่าพันธ์ A และ C แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

มากกว่า B และ E

และ D น้อยกว่าทุกพันธ์

3.9 ตัวอย่างการทดลองที่มีข้อมูลหลายตัวในบล็อก

ตัวอย่างการศึกษาการเก็บเกี่ยวผลผลิตทางการเกษตรเป็นระยะเวลาติดต่อกันจากแปลงเดียวกันในปีต่าง ๆ จากตัวอย่างการทดลองของ Haber (1946) มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบอิทธิพลของวันที่ตัดหน่อไม้ฝรั่งที่แตกต่างกันโดยในทุก ๆ ปีจะตัดวันที่ 1) 1 มิ.ย. 2) 15 มิ.ย. 3) 1 ก.ค. 4) 15 ก.ค. ดำเนินการทดลองเริ่มปลูกหน่อไม้ฝรั่งในปี 1927 เก็บข้อมูลเป็นผลผลิตวัดเป็นน้ำหนักออนซ์ ในปี 1930, 1931, 1932 และ 1933 ในแปลงหนึ่ง ๆ ได้ข้อมูลดังตาราง

ตาราง 4.8 ข้อมูลผลผลิตวัดน้ำหนักเป็นออนซ์ของหน่อไม้ฝรั่งที่วันตัดแตกต่างกันในปีต่าง ๆ

บล็อก	ปี	วันตัด				Total
		1 มิ.ย.	15 มิ.ย.	1 ก.ค.	15 ก.ค.	
1	1930	230	212	183	148	773
	1931	324	415	320	246	1,305
	1932	512	584	456	304	1,856
	1933	399	386	255	144	1,184
		1,465	1,597	1,214	842	5,118 = $y_{.1.}$
2	1930	216	190	186	126	718
	1931	317	296	295	201	1,109
	1932	448	471	387	289	1,595
	1933	361	280	187	83	911
		1,342	1,237	1,055	699	4,333 = $y_{.2.}$
3	1930	219	151	177	107	654
	1931	357	278	298	192	1,125
	1932	496	399	427	271	1,593
	1933	344	254	239	90	927
		1,416	1,082	1,141	660	4,299 = $y_{.3.}$
4	1930	200	150	209	168	727
	1931	362	336	328	226	1,252
	1932	540	485	462	312	1,799
	1933	381	279	244	168	1,072
		1,483	1,250	1,243	874	4,850 = $y_{.4.}$
$y_{i..}$		5,706	5,166	4,653	3,075	18,600 = $y_{...}$

3.9.1 ตัวแบบสถิติ

ตัวแบบสถิติของการทดลองนี้คือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + d_{(ij)k}$$

เมื่อ y_{ijk} คือ น้ำหนักผลผลิตหน่อไม้ฝรั่งในปี k ของแปลง j ของวันตัดที่ i

μ คือ ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักผลผลิตทั้งหมดของประชากร

τ_i คือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ซึ่งได้แก่วันที่ตัด i

β_j คือ อิทธิพลของบล็อกซึ่งได้แก่ แปลง j

ε_{ij} คือ ความคลาดเคลื่อนของการทดลองที่สุ่มภายในทรีทเมนต์

$d_{(ij)k}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของการสุ่มตัวอย่างภายในบล็อก

3.9.2 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน

ตารางที่ 4.9 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก ซึ่งในแต่ละบล็อกมีตัวอย่างย่อย

Sov	df
ทรีทเมนต์	a - 1
บล็อก	b - 1
Experimental Error	(a - 1)(b - 1)
Sampling Error	ab(n - 1)
Total	N - 1

การคำนวณผลบวกกำลังสอง

$$CT = \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - CT \qquad ; \quad df = N - 1$$

$$SS_{Tr} = \frac{1}{bn} \sum_i y_{i..}^2 - CT \qquad ; \quad df = a - 1$$

$$SS_{Block} = \frac{1}{an}\sum_{j} y_{\cdot j \cdot}^{2} - CT \qquad ; \ df = b - 1$$

$$SS_{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{i}\sum_{j} y_{ij\cdot}^{2} - SS_{Tr} - SS_{Block} - CT \qquad ; \ df = (a-1)(b-1)$$

$$SS_{d} = \sum_{j}\sum_{j}\sum_{k} y_{ijk}^{2} - \frac{1}{n}\sum_{i}\sum_{j} y_{ij}^{2} - CT \qquad ; \ df = ab(n-1)$$

การสร้างตารางค่าความหมายของกำลังสองเฉลี่ย

ตารางที่ 4.10 ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยของแต่ละเทอม

องค์ประกอบ	F a i	R b j	R n k	E(MS)
τ_i	0	b	n	$\sigma_d^2 + n\sigma_\varepsilon^2 + bn\frac{\sum \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	1	n	$\sigma_d^2 + n\sigma_\beta^2$
ε_{ij}	0	1	n	$\sigma_d^2 + n\sigma_\varepsilon^2$
$d_{(ij)k}$	1	1	1	σ_d^2

3.9.3 สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบ คือ

$H_0 : \tau_i = 0$ คู่กับ $H_1 : \tau_i \neq 0$

สถิติทดสอบ คือ $F = \frac{MSTr}{MSE}$

ถ้าต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับบล็อกก็สามารถทำได้คือ

$H_0 : \beta_j = 0$ คู่กับ $H_1 : \beta_j \neq 0$

สถิติทดสอบ คือ $F = \frac{MSB}{MSd}$

3.9.4 ค่าประมาณของความแปรปรวน

การคำนวณค่าประมาณของความแปรปรวน

- ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในการสุ่มตัวอย่างคือ σ_s^2 ประมาณได้โดย

  $\hat{\sigma}_d^2 = MSS$

- ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในการทดลองคือ σ_ε^2 จาก $\sigma_d^2 + n\sigma_\varepsilon^2$ ประมาณได้โดย MSE

  ดังนั้นประมาณค่า σ_ε^2 ได้โดย

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{MSE - MSd}{n}$$

3.9.5 ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คือ

$$S_{\bar{y}_{i..}} = \sqrt{\frac{MSE}{bn}}$$

3.9.6 สัมประสิทธิ์ความแปรปรวน

สัมประสิทธิ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในการทดลองคือ

$$\text{C.V. ความคลาดเคลื่อนในการทดลอง} = \frac{\sqrt{MSE}}{\bar{y}_{...}}$$

สัมประสิทธิ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในการสุ่มตัวอย่างคือ

$$\text{C.V. (Sampling Error)} = \frac{\sqrt{MSd}}{\bar{y}_{...}}$$

ค่าของ 100% C.V. ไม่ควรเกิน 15%

3.9.7 ตัวอย่างการคำนวณการวิเคราะห์ความแปรปรวน

1) การคำนวณผลบวกกำลังสอง

$$CT = \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$= \frac{(18600)^2}{64}$$

$$= 5405625$$

$$SS_{Total} = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - CT$$

$$= (230^2 + 324^2 + ... + 168^2) - CT$$

$$=$$

$$SS_{Tr} = \frac{1}{bn} \sum_i y_{i\cdot\cdot}^2 - CT$$

$$= \frac{1}{4 \times 4}(5706^2 + 5166^2 + 4653^2 + 3075^2) - CT$$

$$= 241376.625$$

$$SS_{บล็อก} = \frac{1}{an} \sum_j y_{\cdot j\cdot}^2 - CT$$

$$= \frac{1}{4 \times 4}(5118^2 + 4333^2 + 4299^2 + 4850^2) - CT$$

$$= 30169.625$$

$$SS_E = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j y_{ij\cdot}^2 - SS_{Tr} - SS_{บล็อก} - CT$$

$$= \frac{1}{4}(1465^2 + 1342^2 + ... + 874^2) - CT$$

$$= 21860.750$$

$$SS_{Sampling\ error} = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{1}{n} \sum_i \sum_j y_{ij\cdot}^2 - CT$$

$$= 585386.0$$

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตารางที่ 4.11 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลผลิตหน่อไม้ฝรั่งออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก ซึ่งในแต่ละบล็อกมีตัวอย่างย่อย

Sov	df	Sum of Square	Mean Square	F_0
วันที่ตัด	3	241376.625	80458.875	33.125
บล็อก	3	30169.625	10056.542	4.140
Experimental error	9	21860.750	2 428.972	.199
Sampling error	48	585386.0	12195.542	
Total	63			

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนพบว่าวันที่ตัดแตกต่างกันทำให้ผลผลิตหน่อไม้ฝรั่งแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ต่อไปเราต้องการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวันที่ตัดหน่อไม้ฝรั่งแตกต่างกันจากข้อมูลผลผลิตทั้งหมดของ 4 ปี คือ 5706, 5166, 4653 และ 3075 ออนซ์ ดูได้คร่าว ๆ ว่าผลผลิตลดลง ดังนั้นเราอาจใช้วิธีการแบ่ง SS ของทรีทเมนต์วันที่ตัดออกเป็น 3 โพลีโนเมียลคอนทรัสคือ linear, quadratic และ cubic ของการถดถอยของผลผลิตบนวันที่ตัด

เราอยากได้สารสนเทศเกี่ยวกับความคงเส้นคงวาของความแตกต่างของทรีทเมนต์จากปีหนึ่งสู่อีกปีหนึ่ง ซึ่งดูได้จากปฏิสัมพันธ์ ทรีทเมนต์ $\times$ ปี โดยการวิเคราะห์การถดถอยของผลผลิตที่ถดถอยบนปี

วิธีการคำนวณคือ คูณผลผลิตของปีต่าง ๆ 4 ปี ด้วยสัมประสิทธิ์ (-3, -1, +1, +3) แล้วบวกกันทุกตัว แล้วหารด้วยตัวหารที่เหมาะสมคิดจาก $(\sum c_i^2)n$ การถดถอยเชิงเส้นตรงนี้เป็นการวัดอัตราเฉลี่ยของการเพิ่มขึ้นของผลผลิตจากปีหนึ่งไปอีกปีหนึ่ง และการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นตรงของหน่อไม้ฝรั่งอยู่ในตาราง 12.14.2

จากผลรวมของแต่ละทรีทเมนต์แสดงให้เห็นว่าการเพิ่มขึ้นของผลผลิตต่อปีมากที่สุดที่วันตัด 1 มิ.ย. และลดลงเมื่อวันตัดเพิ่มขึ้น ที่วันตัด 15 กรกฎาคม ได้ค่าผลรวมเพียง 119

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนของเทอมการถดถอยเชิงเส้นตรงเหล่านี้สามารถแบ่ง SS ของวันตัดออกเป็น linear, quadratic และ cubic regression ผลการวิเคราะห์พบว่ามีเพียงเทอมเส้นตรงเท่านั้นที่มีนัยสำคัญ แสดงว่าการเพิ่มวันตัดทีละ 2 สัปดาห์ ทำให้ผลผลิตลดลงเป็นอัตราเท่า ๆ กัน

ตารางที่ 4.12 การคำนวณโพลีโนเมียลคอนทรัสของผลผลิตหน่อไม้ฝรั่งที่ถดถอยบนปี

บล็อก	วันตัด				ผลรวม
	1 มิ.ย.	15 มิ.ย.	1 ก.ค.	15 ก.ค.	
1	695*	691	352	46	1,784
2	566	445	95	-41	1,065
3	514	430	315	28	1,287
4	721	536	239	86	1,582
ผลรวม	2,496	2,102	1,001	119	5,718

ตารางที่ 4.13

Sov	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
บล็อก	3	3,776	
วันตัด	(3)	43,633	14,544**
Linear	1	42,354	
Quadratic	1	744	
Cubic	1	536	
Error	9	2,236	248

* 695 = 3(399) + 512 - 324 - 3(230), from table 12.14.1

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนที่แบ่ง SS ของวันที่ตัดออกเป็น 3 โพลีโนเมียลคอนทรัสได้ดังนี้

ตารางที่ 4.14 การวิเคราะห์ความแปรปรวนที่มีการทดสอบโพลีโนเมียลคอนทรัส

Sov	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
บล็อก	3	30,170	
วันตัด	(3)	(241,377)	
Linear	1		220,815**
Quadratic	1		16,835*
Cubic	1		3,727
Error	9		2,429

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนพบว่า มีความสัมพันธ์แบบ quadratic นั่นคือ ผลผลิตหน่อไม้ฝรั่งจะตกลงมากขึ้น ๆ อย่างรวดเร็ว เมื่อวันที่ตัดเพิ่มขึ้น

4. การเปรียบเทียบทรีทเมนต์

4.1 วิธี least significant differences

การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ 2 ทรีทเมนต์ ภายหลังการวิเคราะห์ความแปรปรวนที่สรุปได้ว่าปฏิเสธ H_0 คือ มีความแตกต่างระหว่างทรีทเมนต์ต่าง ๆ อย่างน้อย 1 ทรีทเมนต์ เราสามารถใช้วิธี least significant differences (lsd) ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างทรีทเมนต์แบบเป็นรายคู่ได้ สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ สำหรับทุกค่า } i \neq j \text{ คู่กับ } H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คู่ใด ๆ คือ $\sqrt{2s^2/r}$ ดังนั้น ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ 2 ทรีทเมนต์ หารด้วยความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sqrt{2s^2/r}$ จะมีการแจกแจงแบบ t ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับจำนวนชั้นอิสระของความคลาดเคลื่อน เขียนเป็นสูตรสถิติทดสอบคือ

$$t = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{2s^2/r}}$$

ถ้าค่าสถิติ t ที่คำนวณได้นี้มากกว่าหรือเท่ากับ ค่า $t_{\alpha/2\,(\mathrm{df\ error})}$ ซึ่งเปิดค่าได้จากตารางการแจกแจง t ที่ระดับนัยสำคัญ α เราจะสรุปว่าค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คู่นั้นมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ α

หรืออาจใช้วิธีการเปรียบเทียบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์แต่ละคู่คือ $\bar{y}_i - \bar{y}_j$ กับค่า $t_{\alpha/2} \cdot \sqrt{2s^2/r}$

ถ้า $\left|\bar{y}_i - \bar{y}_j\right| > t_{\alpha/2} \cdot \sqrt{2s^2/r}$ เราจะสรุปว่าค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คู่นั้นมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ α

จากการศึกษาเกี่ยวกับเวลาของปฏิกิริยาโต้กลับของคนต่อแสงแฟลช พบว่าค่าเฉลี่ยเวลาของปฏิกิริยาโต้กลับของคนต่อแสงแฟลชภายใต้สภาวการณ์อย่างน้อย 1 สภาวการณ์ที่แตกต่างจากสภาวการณ์อื่น ๆ หรือมีอิทธิพลของสภาวการณ์อย่างน้อย 1 สภาวการณ์ที่แตกต่างจากอิทธิพลของสภาวการณ์อื่น ๆ ดังนั้นเราจึงต้องการทราบว่าสภาวการณ์ใดที่มีอิทธิพลแตกต่างจากสภาวการณ์

อื่น ๆ สามารถหาได้โดยการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเวลาของสภาวการณ์ต่าง ๆ ทีละคู่ โดยใช้วิธี least significant differences ดังนี้

ตัวอย่าง เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเวลาของสภาวการณ์ต่าง ๆ ทีละคู่ โดยใช้วิธี least significant differences

วิธีทำ

1. คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยคู่ใด ๆ คือ

$$\sqrt{\frac{2s^2}{r}} = \sqrt{\frac{2 \times 877.765}{5}}$$

$$= 18.738$$

2. คำนวณค่า least significant differences (lsd)

กำหนดให้ α = .05 แล้วเปิดตารางการแจกแจง t ที่จำนวนชั้นอิสระเท่ากับ df_{error} = 16 ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha/2$ เนื่องจากเป็นการทดสอบแบบสองทาง สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ $H_0 : \mu_i = \mu_j$ คู่กับ $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ ที่ $i \neq j$ จากตารางได้ค่า $t_{.025,16}$ = 2.120 ดังนั้นคำนวณค่า lsd คือ

$$lsd = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2s^2}{r}}$$

$$= (2.120)(18.738)$$

$$= 39.72$$

3. คำนวณความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยคู่ใด ๆ

สภาวการณ์	ค่าเฉลี่ย
A	188.2
B	174.0
C	213.4
D	127.6
E	187.6

เปรียบเทียบเป็นคู่	ความแตกต่าง
สภาวการณ์ A – B	14.2
สภาวการณ์ A – C	25.2
สภาวการณ์ A – D	60.6*
สภาวการณ์ A – E	0.6
สภาวการณ์ B – C	39.4
สภาวการณ์ B – D	46.4*
สภาวการณ์ B – E	13.6
สภาวการณ์ C – D	85.8*
สภาวการณ์ C – E	25.8
สภาวการณ์ D – E	60.0*

4. เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยคู่ใด ๆ กับค่า lsd ถ้าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคู่ใดมากกว่าค่า lsd เราจะสรุปว่าค่าเฉลี่ยของประชากร μ_i และ μ_j แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ผลการเปรียบเทียบพบว่ามีเพียงสภาวการณ์ D เท่านั้นที่แตกต่างจากสภาวการณ์อื่น ๆ

4.2 วิธีดันแคน (duncan's multiple range test)

การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทุกคู่ทั้งหมดที่เป็นไปได้ โดยการใช้วิธีของ least significant differences ทำให้ไม่เป็นไปตามระดับนัยสำคัญที่กำหนดไว้ก่อนการทดสอบ ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้วิจัยกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบที่ 5% หรือ .05 แต่ในความเป็นจริงเขาอาจทำการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 8% หรือ .08 จึงทำให้สูญเสียความไวของการทดสอบไป วิธีนี้จะให้ผลการทดสอบที่ถูกต้องก็ต่อเมื่อมีเพียง 2 ทรีทเมนต์เท่านั้น เพราะว่าเป็นสถานการณ์ที่เหมาะสมที่สุดในการใช้การทดสอบ t-test จึงมีการคิดวิธีดันแคนนี้ขึ้นในกรณีที่มีทรีทเมนต์หลายทรีทเมนต์ และต้องการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทั้งหมด โดยที่ไม่มีผลกระทบกับระดับนัยสำคัญที่กำหนดไว้ก่อนการทดสอบ

โดยทั่วไปผลลัพธ์การวิเคราะห์ตามวิธี Duncan multiple range test โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงความไม่แตกต่างของทรีทเมนต์ต่าง ๆ โดยการให้แต่ละกลุ่มของทรีทเมนต์ที่ไม่แตกต่างกันนั้น มีตัวอักษรเดียวกัน จากตัวอย่างข้างต้นได้ผลการเปรียบเทียบตามวิธีดันแคนสำหรับ α = .05 และ .01 คือ

α = .05 D B E A C α = .01 D B E A C

a b b b b a ab b b b

ผลลัพธ์ที่ได้สรุปได้ว่า ที่ α = .05 ทรีทเมนต์ D แตกต่างจากทรีทเมนต์อื่น ๆ ทั้งหมด ขณะที่ทรีทเมนต์ B, E, A, C ไม่แตกต่างกัน สำหรับที่ α = .01 ผลลัพธ์แตกต่างกันนิดหน่อยคือ ทรีทเมนต์ D, B ไม่แตกต่างกัน และทรีทเมนต์ B, E, A, C ไม่แตกต่างกัน

ตัวอย่าง

จากการวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปได้ว่ามีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของน้ำหนักแห้งรวมทั้งหมดจากทรีทเมนต์ทั้ง 8 ทรีทเมนต์ อย่างน้อย 1 ทรีทเมนต์ เราต้องการทราบว่าทรีทเมนต์ใดที่แตกต่างจากทรีทเมนต์อื่น ๆ เราสามารถใช้วิธีของดันแคนที่มีขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

วิธีทำ

1. เรียงลำดับค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ต่าง ๆ จากน้อยไปมาก

$\bar{y}_{5\cdot} = 1280$

$\bar{y}_{4\cdot} = 1358$

$\bar{y}_{2\cdot} = 1540$

$\bar{y}_{3\cdot} = 1639$

$\bar{y}_{1\cdot} = 1754$

$\bar{y}_{8\cdot} = 1861$

$\bar{y}_{7\cdot} = 1966$

$\bar{y}_{6\cdot} = 2101$

2. คำนวณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์

$$S_{\bar{y}_{i\cdot}} = \sqrt{\frac{MSE}{b}} = \sqrt{\frac{56173.16}{5}} = 105.994$$

3. คำนวณช่วงวิกฤติ (The least signifieant ranges)

$$R_2 = r_{.05}(2, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 2.89\ (105.994) = 306.31$$

$$R_3 = r_{.05}(3, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 3.04\ (105.994) = 322.21$$

$R_4 = r_{.05}(4, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 3.12\ (105.994) = 330.69$

$R_5 = r_{.05}(5, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 3.20\ (105.994) = 339.17$

$R_6 = r_{.05}(6, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 3.25\ (105.994) = 344.47$

$R_7 = r_{.05}(7, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 3.26\ (105.994) = 345.53$

$R_8 = r_{.05}(8, 28)\ S_{\bar{y}_{i\cdot}} = 3.32\ (105.994) = 351.89$

4. การเปรียบเทียบรายคู่คือ

6 คู่กับ 5 : 2101 - 1280 = 821 > 351.89 (R_8)

6 คู่กับ 4 : 2101 - 1358 = 743 > 345.53 (R_7)

6 คู่กับ 2 : 2101 - 1540 = 561 > 344.47 (R_6)

6 คู่กับ 3 : 2101 - 1639 = 462 > 339.17 (R_5)

6 คู่กับ 1 : 2101 - 1754 = 347 > 330.69 (R_4)

6 คู่กับ 8 : 2101 - 1891 = 240 < 322.21 (R_3)

6 คู่กับ 7 : 2101 - 1966 = 105 < 306.31 (R_2)

7 คู่กับ 5 : 1966 - 1280 = 716 > 345.53 (R_7)

7 คู่กับ 4 : 1966 - 1358 = 638 > 344.47 (R_6)

7 คู่กับ 2 : 1966 - 1540 = 456 > 339.17 (R_5)

7 คู่กับ 3 : 1996 - 1639 = 357 > 330.69 (R_4)

7 คู่กับ 1 : 1966 - 1754 = 242 < 322.21 (R_3)

7 คู่กับ 8 : 1966 - 1861 = 135 < 306.31 (R_2)

8 คู่กับ 5 : 1966 - 1280 = 581 > 344.47 (R_6)

8 คู่กับ 4 : 1861 - 1358 = 503 > 339.17 (R_5)

8 คู่กับ 2 : 1861 - 1540 = 321 < 330.69 (R_4)

8 คู่กับ 3 : 1861 - 1639 = 222 < 322.21 (R_3)

8 คู่กับ 1 : 1861 - 1754 = 107 < 306.31 (R_2)

1 คู่กับ 5 : 1754 - 1280 = 474 > 339.17 (R_5)

1 คู่กับ 4 : 1754 - 1358 = 396 > 330.69 (R_4)

1 คู่กับ 2 : 1754 - 1540 = 214 < 322.21 (R_3)

1 คู่กับ 3 : 1754 - 1639 = 115 < 306.31 (R_2)

3 คู่กับ 5 : 1639 - 1280 = 359 > 330.69 (R_4)

3 คู่กับ 4 : 1639 - 1358 = 281 < 322.21 (R_3)

3 คู่กับ 2 : 1639 - 1540 = 99 < 306.31 (R_2)

2 คู่กับ 5 : 1540 - 1280 = 260 < 322.21 (R_3)

2 คู่กับ 4 : 1540 - 1358 = 182 < 306.31 (R_2)

4 คู่กับ 5 : 1358 - 1280 = 78 < 306.31 (R_2)

5. นำค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์มาเรียงลำดับจากน้อยไปหามากแล้วขีดเส้นใต้เฉพาะกลุ่มที่ไม่แตกต่างกัน

$$\bar{y}_{5.} \quad \bar{y}_{4.} \quad \bar{y}_{2.} \quad \bar{y}_{3.} \quad \bar{y}_{1.} \quad \bar{y}_{8.} \quad \bar{y}_{7.} \quad \bar{y}_{6.}$$

6. ดังนั้นสรุปผลได้ว่า $\mu_2 = \mu_4 = \mu_5$

$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$\mu_1 = \mu_7 = \mu_8$

$\mu_6 = \mu_7 = \mu_8$

และ ทรีทเมนต์ที่ 6 มีค่าเฉลี่ยสูงกว่าทรีทเมนต์ที่ 2, 4 และ 5 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

ทรีทเมนต์ที่ 7 มีค่าเฉลี่ยสูงกว่าทรีทเมนต์ที่ 4 และ 5 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

ทรีทเมนต์ที่ 8 มีค่าเฉลี่ยสูงกว่าทรีทเมนต์ที่ 4 และ 5 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

5. การคอนทรัสต์ (Contransts)

5.1 การสร้างคอนทรัสต์

สำหรับการทดลองที่ทำเพื่อตอบคำถามที่สงสัยโดยเฉพาะมักเกิดขึ้นได้ภายหลังโปรแกรมการวิจัยหนึ่ง ๆ เราสามารถกำหนดการเปรียบเทียบหรือคอนทรัสต์ (contrasts) ระหว่างค่าเฉลี่ย หรือผลรวมของทรีทเมนต์ต่าง ๆ ตามคำถามที่ต้องการหาคำตอบนั้น ๆ แล้วทำการทดสอบในการวิเคราะห์สถิติต่อไป โดยที่ทรีทเมนต์ทั้งหมดมีจำนวนซ้ำเท่ากันคือ r

ถ้าในการทดลองมี 3 ทรีทเมนต์ คือ A, B, C และ A มีคุณลักษณะแตกต่างจากอีก 2 ทรีทเมนต์ เราสามารถสร้างคอนทรัสต์ได้ 2 คอนทรัสคือ

กำหนดให้ คอนทรัส 1 คือ ความแตกต่างของ A และค่าเฉลี่ยของ B และ C

คอนทรัส 2 คือ ความแตกต่างระหว่าง B และ C

เขียนเป็นสมการเส้นตรงได้คือ

คอนทรัส 1 = $\bar{y}_A - \frac{1}{2}(\bar{y}_B + \bar{y}_C)$ หรือ $2\bar{y}_A - \bar{y}_B - \bar{y}_C$ หรือเขียนในเทอมของผลรวมของทรีทเมนต์ได้คือ $2T_A - T_B - T_C$ ซึ่งเขียนเป็นสัมประสิทธิ์ของคอนทรัสได้คือ (2, -1, -1) ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่สะดวกในการคำนวณมากกว่าเขียนเป็น $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

การวิเคราะห์ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยการคำนวณหา s^2 แล้วนำมาประมาณค่า ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของคอนทรัส ตัวอย่างเช่น

$$\operatorname{var}\left(\bar{y}_A - \frac{1}{2}\bar{y}_B - \frac{1}{2}\bar{y}_C\right) = \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{4r} + \frac{\sigma^2}{4r}$$

$$= \frac{3\sigma^2}{2r}$$

เนื่องจากในการออกแบบการทดลองมีการสุ่มที่เหมาะสม ดังนั้นการประมาณค่าทรีทเมนต์ต่าง ๆ จึงเป็นอิสระกัน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของคอนทรัสคือ $\sqrt{3s^2/2r}$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\bar{y}_A - \frac{1}{2}(\bar{y}_B - \bar{y}_C)}{\sqrt{3s^2/2r}}$$

มีการแจกแจงแบบ t ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ df_{error} เป็นสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานทางสถิติคือ $H_0 : \mu_A = \frac{1}{2}(\mu_B + \mu_C)$

5.2 การทดสอบคอนทรัสต์

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับคอนทรัสต์ต่าง ๆ เหล่านี้ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน ทำได้โดยแบ่งผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ (SS_{Tr}) ออกเป็นผลรวมกำลังสองของคอนทรัสต์แต่ละคอนทรัสต์ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ 1 แล้วใช้สถิติทดสอบคือ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ ($1, df_{error}$) ทดสอบสมมติฐานของแต่ละคอนทรัส การวิเคราะห์มีข้อตกลงเบื้องต้นคือ มีจำนวนคอนทรัสต์ทั้งหมดเท่ากับจำนวนทรีทเมนต์ลบ 1 คอนทรัสต์ และคอนทรัสต์ทั้งหมดต้องเป็น mutually orthogonal กันทั้งหมด ทำให้บางครั้งต้องกำหนดคอนทรัสต์อื่น ๆ ซึ่งเราอาจไม่สนใจศึกษาเพื่อให้เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นนี้

ตัวอย่าง ตารางข้อมูลตัวอย่างมาจากการทดลองหนึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบทรีทเมนต์ 4 ทรีทเมนต์กับคอนโทรลที่มีผลต่อเมล็ดถั่วเหลือง เก็บข้อมูลจำนวนต้นพืชที่ failed to emerge out of 100 planted in each plot

ตารางที่ 4.15 จำนวน failures out of 100 planted soybean seeds

	บล็อก						
ทรีทเมนต์	1	2	3	4	5	ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
คอนโทรล	8	10	12	13	11	54	10.8
Arasan	2	6	7	11	5	31	6.2
Spergon	4	10	9	8	10	41	8.2
Semesan, Jr.	3	5	9	10	6	33	6.6
Fermate	9	7	5	5	3	29	5.8
ผลรวม	26	38	42	47	35	188	

การวิเคราะห์ความแปรปรวน

correction term CT $= \dfrac{188^2}{25}$

$= 1,413.76$

$SS_{Total} = 8^2 + 2^2 + ... + 3^2 - CT$

$= 220.24$

$SS_{Tr} = \dfrac{54^2 + 31^2 + ... + 29^2}{5} - CT$

$= 83.84$

SSบล็อก $= \dfrac{26^2 + 38^2 + ... + 35^2}{5} - CT$

$= 49.84$

ตารางที่ 4.16 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

Source of variation	Degree of Freedom	Sum of square	Mean square	F
บล็อก	4	49.84	12.46	
ทรีทเมนต์	4	83.84	20.96	3.87*
Error	16	86.56	5.41	
Total	24	220.24		

ผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่าค่าสถิติ F ที่คำนวณได้มากกว่าค่าวิกฤติ F ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือมีค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์อย่างน้อยที่สุด 1 ทรีทเมนต์แตกต่างจากทรีทเมนต์อื่น ๆ

1) ทำการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคอนโทรลกับทรีทเมนต์

$= 10.8 - \dfrac{(6.2 + 8.2 + 6.6 + 5.8)}{4}$

$= 10.8 - 6.7$

$= 4.1$

หาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างคอนโทรลกับทรีทเมนต์อื่น ๆ คือ

$$\sqrt{S^2 \sum \frac{c_i^2}{n_i}} = \sqrt{5.41 \frac{(1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}{5}}$$

$$= \frac{2.326}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2.326}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{2.326}{2} = 1.163$$

ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ 16

ดังนั้นที่ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของความแตกต่างระหว่างทรีทเมนต์กับคอนโทรล คือ

$$4.1 \pm (2.120)(1.163) = 4.1 \pm 2.5$$

$$= (1.6 , 6.6)$$

2) เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ต่าง ๆ 4 ทรีทเมนต์ หาค่า

$$\text{lsd} = t_{.05} \cdot \sqrt{\frac{2S^2}{n}}$$

$$= 2.120 \sqrt{\frac{2 \times 5.41}{5}}$$

$$= (2.120)(1.471)$$

$$= 3.12$$

เนื่องจากความแตกต่างที่ใหญ่ที่สุดคือ 8.2 - 5.8 = 2.4 มีความแตกต่างอย่างไม่มีนัยสำคัญ ดังนั้นอาจตรวจสอบอีกครั้งด้วยวิธีอื่น ๆ

การทำคอนทรัส

เมื่อมีแผนการเปรียบเทียบทรีทเมนต์ที่แน่นอน เราก็สามารถแบ่ง SS ของทรีทเมนต์ออกเป็นส่วน ๆ ได้ตามการเปรียบเทียบที่กำหนดไว้นั้น ในการเปรียบเทียบทรีทเมนต์นี้ เรามักคำนวณจากผลรวมของทรีทเมนต์ T_i มากกว่า การคำนวณจากค่าเฉลี่ย เนื่องจากประหยัดเวลาและหลีกเลี่ยงเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนของทศนิยม

กฎที่ 1) ให้ $L = \sum c_i T_i$

เมื่อ $\sum c_i = 0$, c_i คือสัมประสิทธิ์ของคอนทรัสต์

$SS_{\text{คอนทรัสต์}_1} = L^2 / n \sum c_i^2$

ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ 1

เมื่อ n คือ จำนวนซ้ำของทรีทเมนต์ใด ๆ

ตัวอย่าง การเปรียบเทียบคอนโทรลกับทรีทเมนต์อื่น ๆ ที่ใช้สารเคมีให้เป็นคอนทรัสต์ที่ 1

	คอนโทรล	Arasan	Spergon	Semesan, Jr.	Fermate
ผลรวม T_i	54	31	41	33	29
C_i	4	-1	-1	-1	-1

เพื่อหลีกเลี่ยงตัวเลขสัดส่วน เราจึงใช้สัมประสิทธิ์ของคอนทรัสต์เป็น 4, -1, -1, -1, -1 แทนที่จะเป็น 1, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$ จะได้ว่า

$$L = 4(54) - 31 - 41 - 33 - 29 = 82$$

$$SS_{\text{คอนทรัสต์}_1} = \frac{L^2}{n \sum c_i^2} = \frac{82^2}{(5)(20)} = 67.27$$

ที่มี df = 1

จาก SS ของทรีทเมนต์เท่ากับ 83.84 ที่มี df = 4 แบ่งเป็น SS ของคอนทรัสต์ที่ 1 ออกไปแล้วเหลือ 16.60 ที่มี df = 3 เป็น SS ของผลรวมของทรีทเมนต์ทั้ง 4 รวมกัน ที่เบี่ยงเบนออกไปจากค่าเฉลี่ยของมันเอง คิดได้จาก

$$\frac{31^2 + 41^2 + 33^2 + 29^2}{5} - \frac{134^2}{20} = 16.60$$

เราสามารถสรุปลงในตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

Source of variation	Degree of freedom	Sum of square	Mean square	F
บล็อก	4	49.84		
ทรีทเมนต์	4	83.84		
คอนโทรล VS เคมี	1	67.24	67.24	12.43**
ระหว่างวิธีเคมี	3	16.60	5.53	1.02
Error	16	86.56	5.41	
Total	24	220.24		

ผลการวิเคราะห์แสดงว่าค่าเฉลี่ยของ failure rate ระหว่างคอนโทรลกับวิธีเคมีมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ .01 แต่ระหว่างวิธีเคมีทั้ง 4 วิธี ไม่มีความแตกต่างกัน

ตัวอย่าง ในการศึกษาต้น citrus ทำการศึกษา 3 พันธ์ คือ 1) Shamouti Orange 2) Marsh Grapefruit และ 3) Clementine Mandarin ภายใต้สภาวการณ์ 3 แบบ คือ 1) แดดเต็มที่ 100% 2) ได้แดด 50% 3) ใต้ร่มเงา เก็บข้อมูลเป็น the ratio of leaf area to dry weight

สภาพการณ์ได้แสงแดด	Shamouti Orange	Marsh Grapefruit	Clementine Mandarim
แดดเต็มที่	112	90	123
แดด 50%	86	73	89
ใต้ร่มเงา	80	62	81

ANOVA

Source of variation	Degree of freedom	Sum of square	Mean square	F
บล็อก (species)	2			
การได้แสงแดด	2		942.1	43.2
Error	4		21.8	
Total	8			

ผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่า การได้แสงแดดมีประสิทธิภาพในการลด The relative leaf area

ต้องการเปรียบเทียบ 2 คอนทรัสต์ คือ

คอนทรัสต์ 1 : เปรียบเทียบผลของร่มเงา

คอนทรัสต์ 2 : เปรียบเทียบการได้แดด 50% กับวิธีอื่น ๆ

	แดด 100%	แดด 50%	ร่ม			$\frac{L_i^2}{n\sum c_i^2}$
ผลรวม T_i	325	248	223	L_i	ตัวหาร	SS
ผลของร่มเงา	+1	0	-1	102	6	1734
แดด 50% VS วิธีอื่น ๆ	+1	-2	+1	52	18	150

คอนทรัสต์ที่ 1 ; $L_1 = \sum c_i T_i = (+1)(325) + (-1)(223) = 102$

คอนทรัสต์ที่ 2 ; $L_2 = \sum c_j T_i = (+1)(325) + (-2)(248) + (+1)(223) = 52$

คอนทรัสต์ทั้ง 2 นี้ จะออธอกอนอลกันถ้า $\sum c_i c_j = 0$

เนื่องจาก $(+1)(+1) + (0)(-2) + (-1)(+1) = 0$

ดังนั้นคอนทรัสต์ทั้ง 2 นี้ ออธอกอนอลกัน

ซึ่งทำให้ $\frac{L_1^2}{n\sum c_i^2}$ และ $\frac{L_2^2}{n\sum c_j^2}$ มีความเป็นอิสระกัน อยู่ใน SS ของทรีทเมนต์ที่มี df = 1

และถ้ามีทรีทเมนต์ a ทรีทเมนต์ จะหาคอนทรัสต์ที่เป็น mutually orthogonal กันได้ a – 1 คอนทรัสต์

$$SS_{\text{คอนทรัส}_1} = \frac{102^2}{(3)(2)} = 1734$$

$$SS_{\text{คอนทรัส}_1} = \frac{52^2}{(3)(6)} = 150.22$$

ตารางที่ 4.17 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

Source of variation	Degree of freedom	Sum of square	Mean square	F
บล็อก (พันธุ์)	2			
ทรีทเมนต์ (การได้แสงแดด)	2			
ผลของร่มเงา	1	1734	1734	79.5
แดด 50% VS วิธีอื่น ๆ	1	150	150	6.9
Error	4	87	21.8	
Total	8			

ตัวอย่าง ในการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ที่มี 4 ทรีทเมนต์

ทรีทเมนต์ A คือ ทรีทเมนต์มาตรฐาน

B คือ มีส่วนผสม X จากบริษัทหนึ่ง

C คือ มีส่วนผสม X จากอีกบริษัทหนึ่ง

D คือ มีส่วนผสม Y

ข้อมูลคือ

A 34, 37, 40, 29, 29 C 31, 35, 36, 36, 32

B 38, 44, 36, 40, 47 D 48, 51, 48, 56, 52

วัตถุประสงค์คือ ต้องการเปรียบเทียบ

(ก) ทรีทเมนต์มาตรฐาน กับทรีทเมนต์อื่น ๆ

(ข) ส่วนผสม X กับ Y

(ค) X จากบริษัทหนึ่ง กับ X จากอีกบริษัทหนึ่ง

วิธีทำ

1) ผลรวมของทรีทเมนต์ แต่ละทรีทเมนต์มีจำนวนซ้ำ $r = 5$

$A = 169$, $B = 205$, $C = 170$, $D = 255$

2) สร้างคอนทรัสต์จากวัตถุประสงค์

คอนทรัสต์ 1 คือ $3T_A - (T_B + T_C + T_D)$

คอนทรัสต์ 2 คือ $(T_B + T_C) - 2T_D$

คอนทรัสต์ 3 คือ $T_B - T_C$

3) คำนวณผลบวกกำลังสองของแต่ละคอนทรัส

ตารางที่ 4.18 แสดงการคำนวณผลบวกกำลังสองของคอนทรัส

คอนทรัส	A	B	C	D	ค่า	ตัวหาร	ผลบวกกำลังสอง
	169	205	170	255			SS_C
(ก) A VS (B, C, D)	3	-1	-1	-1	-123	12 × 5	252.15
(ข) (B, C) VS D	0	1	1	-2	-135	6 × 5	607.50
(ค) B VS C	0	1	-1	0	35	2 × 5	122.50
							982.15

$$S_{Tr} = \frac{1}{5}(169^2 + 205^2 + 170^2 + 255^2)$$

$$= 164511/5$$

$$= 32902.20$$

$$CT = 799^2/20$$

$$= 31920.05$$

$$SS_{Tr} = S_{Tr} - CT$$

$$= 982.15$$

ผลบวกกำลังสองของทรีทเมนต์ (SS_{Tr}) มี df เท่ากับ 3

เนื่องจากทุกคู่ของคอนทรัสต์มีคุณสมบัติคือ

$$\sum_{i=1}^{\upsilon} c_i d_i = 0$$

เมื่อ c_i , d_i คือ สัมประสิทธิ์ของคอนทรัสต์ c และ d นั่นคือ คอนทรัสต์ทั้งหมดเป็น mutually orthogonal

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนคือ

ตารางที่ 4.19 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการเปรียบเทียบคอนทรัสต์

Source of variation	d.f.	Sum of sqluares	Mean square	F_O
A vs (B, C, D)	1	252.15	252.15	16.75
(B, C) vs D	1	607.50	607.50	40.37
B vs C	1	122.50	122.50	8.14
ทรีทเมนต์	3	982.15		
ความคลาดเคลื่อน	16	240.80	$15.05 = s^2$	
Total	19	1222.95		

ผลการวิเคราะห์พบว่า

(ก) ทรีทเมนต์ A ต่ำกว่า ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ B, C, D อย่างมีนัยสำคัญ

(ข) ทรีทเมนต์ D สูงกว่า ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ A, C อย่างมีนัยสำคัญ

(ค) ทรีทเมนต์ B สูงกว่า ทรีทเมนต์ C อย่างมีนัยสำคัญ

5.3 การหาช่วงความเชื่อมั่นของคอนทรัสต์

การหาช่วงความเชื่อมั่นของคอนทรัสต์จากตัวอย่างข้างต้นในเทอมของค่าเฉลี่ยต่อหน่วยแปลง เราต้องหาความแปรปรวนของคอนทรัสต์ก่อนคือ

คอนทรัสต์ที่ 1 ประมาณค่าความแปรปรวนได้คือ

$$\text{Var }[\bar{y}_A - \frac{1}{3}(\bar{y}_B + \bar{y}_C + \bar{y}_D)] = \frac{\sigma^2}{5} + \frac{1}{9}(\frac{\sigma^2}{5} + \frac{\sigma^2}{5} + \frac{\sigma^2}{5}) = \frac{4\sigma^2}{15}$$

$$= \frac{4}{15}(15.05) = 4.013$$

คอนทรัสต์ที่ 2 ประมาณค่าความแปรปรวนได้คือ

$$\text{Var }[\bar{y}_D - \frac{1}{2}(\bar{y}_B + \bar{y}_C)] = \frac{\sigma^2}{5} + \frac{1}{4}(\frac{\sigma^2}{5} + \frac{\sigma^2}{5}) = \frac{3\sigma^2}{10}$$

$$= \frac{3}{10}(15.05) = 4.515$$

คอนทรัสต์ที่ 3 ประมาณค่าความแปรปรวนได้คือ

$$\text{Var }[\bar{y}_B - \bar{y}_C] = \frac{2\sigma^2}{5}$$

$$= \frac{2}{5}(15.05) \quad = \quad 6.020$$

เนื่องจาก s^2 มี df = 16 และสถิติทดสอบที่ใช้คำนวณช่วงความเชื่อมั่นคือ $t_{(16)}$
ตัวอย่างเช่น 95% ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าจริงของคอนทรัสต์ $(\mu_D - (\mu_B + \mu_C)/2)$ คือ

$$\{\bar{y}_D - \frac{1}{2}(\bar{y}_B + \bar{y}_C)\} \pm t_{16}\sqrt{\frac{3s^2}{10}} = 13.5 \pm 2.12\,(2.125)$$

$$= 13.5 \pm 4.50$$

$$= (9.0\,,\,18.0)$$

ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้นี้ค่อนข้างกว้างแสดงให้เห็นว่าความผันแปรในข้อมูลเหล่านี้ค่อนข้างสูง

5.4 ตัวอย่างการสร้างคอนทรัสต์

สมมติว่าในการทดลองทางการเกษตรเกี่ยวกับการควบคุมแมลงศัตรูพืชชนิดหนึ่ง

ให้ O คือ ไม่ให้ทรีทเมนต์ หรือคอนโทรล

S คือ วิธีการควบคุมแมลงแบบมาตรฐาน

A, B, C, D คือ วิธีการควบคุมแมลงแบบใหม่

A และ B ใช้สารประกอบชนิดหนึ่งที่มีความแตกต่างกันทาง physical forms

C และ D ใช้สารประกอบอีกชนิดหนึ่งที่พัฒนามาแตกต่างกัน

คำถามของการทดลองนี้คือ

ก. ทรีทเมนต์ O แตกต่างจากทรีทเมนต์อื่น ๆ หรือไม่

ข. ทรีทเมนต์ S ดีพอ ๆ กับทรีทเมนต์แบบใหม่หรือไม่

ค. ทรีทเมนต์ A และ B แตกต่างกันหรือไม่ (มีอิทธิพลของ physical forms หรือไม่)

ง. ทรีทเมนต์ C และ D แตกต่างกันหรือไม่ (มีอิทธิพลของวิธีการพัฒนาหรือไม่)

จ. ทรีทเมนต์ A และ B แตกต่างจาก C และ D หรือไม่ (มีอิทธิพลของสารประกอบหรือไม่)

มีทั้งหมด 6 ทรีทเมนต์คือ O, S, A, B, C, D มี r ซ้ำ เราสามารถใช้คำถามของการทดลองนี้สร้างเป็นคอนทรัสต์ได้ 5 คอนทรัสต์ที่ออธอกอนอลกัน ซึ่งตรวจสอบได้จากตารางของค่าสัมประสิทธิ์ของคอนทรัสต์ ดังนี้

ตารางที่ 4.20 สัมประสิทธิ์ของคอนทรัสต์ 5 คอนทรัสต์

คอนทรัสต์	O	S	A	B	C	D	ตัวหาร
1. O VS (S, A, B, C, D)	5	-1	-1	-1	-1	-1	30r
2. S VS (A, B, C, D)	0	4	-1	-1	-1	-1	20r
3. A VS B	0	0	1	-1	0	0	2r
4. C VS D	0	0	0	0	1	-1	2r
5. (A, B) VS (C, D)	0	0	1	1	-1	-1	4r

6. การตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน

6.1 ข้อตกลงเบื้องต้น

การใช้เศษตกค้างในการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกที่มีตัวแบบคือ

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

ที่มีข้อตกลงเบื้องต้นคือ

(ก) เป็นตัวแบบที่เกิดจากการบวกเทอมต่าง ๆ

(ข) ในเซ็ตของ $\{\tau_i\}$ และ $\{\beta_j\}$ มีความผันแปรอย่างเป็นระบบทั้งหมดรวมอยู่ด้วย นอกเหนือจากเซ็ต $\{\varepsilon_{ij}\}$ ที่เป็นเทอมความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอย่างสุ่ม

(ค) ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างเซ็ต $\{\tau_i\}$ และ $\{\beta_j\}$ คือ การตอบสนองของทรีทเมนต์หนึ่ง ๆ เหมือนกันในแต่ละบล็อก

(ง) ความคลาดเคลื่อนทั้งหมด $\{\varepsilon_{ij}\}$ เป็นอิสระกัน มีการกระจายแบบปกติจากการแจกแจงแบบเดียวกันคือ $N(0, \sigma^2)$ โดยที่การกระจายของทุกกลุ่มทรีทเมนต์เท่ากัน เท่ากับค่าคงที่ตัวหนึ่งคือ σ^2

ข้อตกลงเบื้องต้นข้อ (ก) มักจะเป็นที่พอใจอยู่แล้วคือสามารถใช้ในการประมาณได้ดี และข้อ (ข) แสดงนัยว่าในการทดลองนี้ต้องการการบล็อกสำหรับปัจจัยรบกวนเพียง 1 ปัจจัยเท่านั้น ข้อตกลงเบื้องต้นข้อ (ค) มีความสำคัญทีเดียว ยกตัวอย่างเช่น โรงพยาบาลหลายแห่งเป็นส่วนหนึ่งของการทดลองเกี่ยวกับการให้ยาที่แตกต่างกันในการรักษาโรคชนิดหนึ่ง โรงพยาบาลต่าง ๆ เหล่านั้นอาจทำการรักษาโดยการให้ยาด้วยวิธีการที่ไม่เหมือนกันทีเดียว และการ

เปรียบเทียบยาชนิดต่าง ๆ เป็นรายคู่ใด ๆ อาจมีความแตกต่างกันระหว่างโรงพยาบาลหนึ่งกับโรงพยาบาลอื่น ๆ นี่คือการเกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างทรีทเมนต์และบล็อกคือ ยา และ โรงพยาบาล เราสามารถตรวจพบได้โดยการตรวจสอบว่ามีบางทรีทเมนต์หรือไม่ที่ค่าสังเกตมีความผันแปรมากกว่าทรีทเมนต์อื่น ๆ ข้อตกลงเบื้องต้นทุกข้อนี้สามารถศึกษาได้โดยดูจากเศษตกค้าง และข้อตกลงเบื้องต้นข้อ (ง) เกี่ยวข้องกับเศษตกค้างทั้งหมด

6.2 เศษตกค้าง (residuals)

ให้เซ็ตของเศษตกค้างคือ $\{\varepsilon_{ij}\}$ จากตัวแบบสถิติ เราสามารถประมาณค่า fitted value $(\hat{y}_{ij})$ ได้ดังนี้

$$\hat{y}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j$$

ดังนั้นจะได้ว่า $y_{ij} - \hat{y}_{ij}$ คือเศษตกค้าง หรือค่าประมาณของ ε_{ij}

6.3 การตรวจสอบความเป็นอิสระ

ในการวางแผนการทดลองที่มีการสุ่มที่เหมาะสม ทำให้มั่นใจได้ว่าเศษตกค้างเหล่านี้เป็นอิสระกัน แต่เศษตกค้างเหล่านี้อาจมีรูปแบบซึ่งจะชี้ให้เห็นถึงปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการทดลอง คือ อาจเกิดปัญหาการดำเนินการทดลองที่มีรูปแบบอย่างเป็นระบบ ตัวอย่างเช่นในการทดลองในทางอุตสาหกรรมที่มีการดำเนินงานบนเครื่องจักร บางทรีทเมนต์อาจถูกทดลองเป็นอันดับแรกหรือเป็นอันดับสุดท้ายเสมอ ๆ หรือการดำเนินการในแต่ละวันที่ทำการทดลองมีความแตกต่างจากวันปกติวันอื่น ๆ หรือมีแนวโน้มของเวลา

ตัวอย่าง การทดลองที่ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อกที่มี 5 บล็อก และ 6 ทรีทเมนต์ คือ A – F เก็บข้อมูลได้ดังตาราง

ตารางที่ 4.21 แสดงแผนภาพการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก และค่าสังเกตของทรีทเมนต์ต่าง ๆ ในแต่ละบล็อก

	บล็อก									
	1		2		3		4		5	
	A	3.5	C	5.0	F	11.5	E	8.5	B	11.0
	C	2.5	D	8.5	B	9.0	A	8.0	D	12.5
	E	3.0	A	5.0	C	4.5	C	6.0	F	16.5
	B	5.0	B	8.5	D	11.0	F	13.5	E	9.0
	F	8.0	E	5.0	E	6.0	B	12.5	C	7.5
	D	8.0	F	11.5	A	7.0	D	13.0	A	10.5
ผลรวม	30.0		43.5		49.0		61.5		67.0	

ผลรวมของทรีทเมนต์คือ

A = 34.0 , B = 46.0 , C = 25.5 , D = 53.0 , E = 31.5 , F = 61.0

ผลรวมทั้งหมด = 251.0 ดังนั้นจะได้ว่า

ประมาณค่าเฉลี่ยทั้งหมด ; $\hat{\mu} = \frac{251.0}{30}$

$= 8.37$

และ $\hat{\mu} + \hat{\tau}_A = \frac{34.0}{5}$

$= 6.80$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ ; $\hat{\tau}_A = 6.80 - 8.37$

$= -1.57$

ในทำนองเดียวกัน

$\hat{\tau}_B = 0.83$, $\hat{\tau}_C = -3.27$, $\hat{\tau}_D = 2.23$, $\hat{\tau}_E = -2.07$, $\hat{\tau}_F = 3.83$

การประมาณค่าพารามิเตอร์บล็อก ทำในทำนองเดียวกันคือ

$$\hat{\mu} + \hat{\beta}_1 = \frac{30.0}{6}$$

$$= \; 5.0$$

ดังนั้น $\hat{\beta}_1 = 5.0 - 8.37$

$$= -3.37$$

ในทำนองเดียวกัน

$\hat{\beta}_2 = -1.12$, $\hat{\beta}_3 = -0.20$, $\hat{\beta}_4 = 1.88$, $\hat{\beta}_5 = 2.80$

เนื่องจากในแต่ละทรีทเมนต์มีจำนวนซ้ำเท่ากัน $\sum \hat{\tau}_i = 0$ (= -0.02 เพราะการคำนวณใช้ทศนิยม 2 ตำแหน่ง) และ $\sum \hat{\beta}_j = 0$ (= -0.01)

การประมาณค่าของเศษตกค้างคือ

$$y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j$$

จะได้ค่าประมาณของเศษตกค้าง ε_{ij} ดังตาราง

ตารางที่ 4.22 ค่าประมาณของเศษตกค้าง ε_{ij}

บล็อก 1		บล็อก 2		บล็อก 3		บล็อก 4		บล็อก 5		
A	0.07	C	1.02	F	-0.50	E	0.32	B	-1.00	-0.09
C	0.77	D	-0.98	B	0.00	A	-0.68	D	-0.90	-1.79
E	0.07	A	-0.68	C	-0.40	C	-0.98	F	1.50	-0.49
B	-0.83	B	0.42	D	0.60	F	-0.58	E	-0.10	-0.49
F	-0.83	E	-0.18	E	-0.10	B	1.42	C	-0.40	-0.09
D	0.77	F	0.42	A	0.40	D	0.52	A	0.90	3.01
	0.02		0.02		0		0.02		0	

ผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับศูนย์ในแต่ละบล็อก เพราะมีเทอมบล็อกรวมอยู่ในตัวแบบการทดลอง และเราสามารถตรวจสอบได้ว่าทรีทเมนต์ต่าง ๆ ในการทดลองเป็นแบบเดียวกันเป็นจริง เมื่อผลบวกของเศษตกค้างของแต่ละทรีทเมนต์คือ

ทรีทเมนต์ A มีผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับ 0.01

ทรีทเมนต์ B มีผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับ 0.01

ทรีทเมนต์ C มีผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับ 0.01

ทรีทเมนต์ D มีผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับ 0.01

ทรีทเมนต์ E มีผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับ 0.01

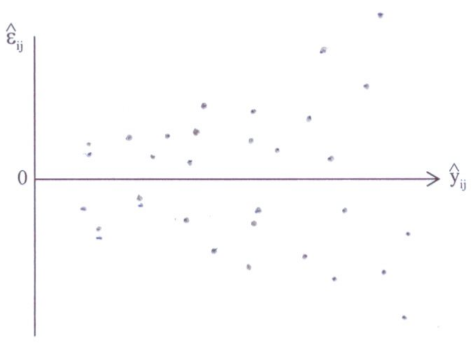
ทรีทเมนต์ F มีผลบวกของเศษตกค้างเท่ากับ 0.01

ผลบวกของเศษตกค้างในแต่ละแถวคือ แถวที่ 1 = -0.09 , แถวที่ 2 = -1.79 , แถวที่ 3 = -0.49 , แถวที่ 4 = -0.49 , แถวที่ 5 = -0.09 , แถวที่ 6 = 3.01 แสดงให้เห็นว่าแถวที่ 6 มีความแตกต่างจากแถวอื่น ๆ และไม่มีรูปแบบในระหว่าง 5 แถวนั้น แต่บางทีเช่นในการทดลองทางการเกษตรอาจมีผลเนื่องมาจากรั้วหรือร่มไม้ทางด้านนั้นของแปลง หรืออิทธิพลของการเป็นการทดลองสุดท้ายของในแต่ละบล็อก

6.4 การตรวจสอบว่าความแปรปรวน σ^2 ไม่มีความเกี่ยวพันกับทรีทเมนต์และบล็อก

ถ้าความแปรปรวน σ^2 ไม่มีความเกี่ยวพันกับทรีทเมนต์และบล็อกแล้ว เซ็ตของความคลาดเคลื่อน $\{\varepsilon_{ij}\}$ จะต้องไม่มีรูปแบบ โดยดูได้จากการพล็อตกราฟการกระจายของ $\hat{\varepsilon}_{ij}$ กับ $\hat{y}_{ij}$ แต่ถ้ามีรูปแบบแสดงว่ามีความเกี่ยวพันกัน ตัวอย่างเช่น

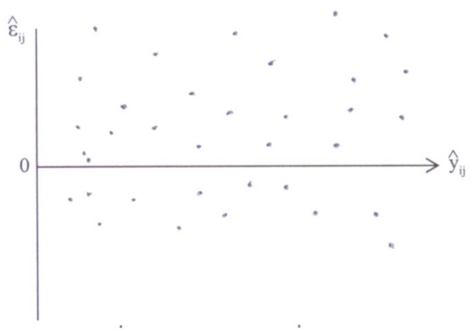
ภาพที่ 1 แสดงเศษตกค้างของค่าสังเกตที่มีค่ามากกว่าจะมีเศษตกค้างมากกว่าด้วย แสดงนัยว่าอัตราส่วนของความแปรปรวนต่อค่าเฉลี่ยจะมีความมั่นคงมากกว่าความแปรปรวนอย่างเดียว ถ้าเกิดกรณีเช่นนี้มีข้อเสนอแนะให้ดำเนินการแปลงข้อมูล (transformation)



ภาพที่ 1 แสดงเศษตกค้างที่เป็นสัดส่วนกับขนาดของค่าสังเกต

6.5 การตรวจสอบความเป็นปกติ

ถ้าเศษตกค้าง $\{\varepsilon_{ij}\}$ มีการแจกแจงโดยประมาณแบบปกติ แล้วเศษตกค้างควรเกาะกลุ่มอยู่ล้อมรอบ 0 ทั้งด้านลบและด้านบวกพอ ๆ กัน แต่ถ้าเศษตกค้างที่มีค่ามาก ๆ ทุกตัวมีสัญญาณแสดงแบบเดียวกันเช่นในภาพที่ 2 จะบอกได้ว่าเศษตกค้างมีการแจกแจงแบบเบ้



ภาพที่ 2 แสดงเศษตกค้างที่มีการแจกแจงแบบเบ้

เราสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการแสดงเกี่ยวกับเศษตกค้างได้ โดยการพล็อตกราฟระหว่างค่าประมาณของเศษตกค้าง ($\hat{\varepsilon}_{ij}$) กับค่า fitted value ($\hat{y}_{ij}$) ถ้าเศษตกค้างเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความเป็นปกติจะได้กราฟดังภาพที่ 3

ภาพที่ 3 แสดงเศษตกค้างที่มีการแจกแจงแบบปกติ

วิธีง่าย ๆ ที่สามารถใช้ดูความผันแปรในแต่ละทรีทเมนต์คือ การหาพิสัยของเศษตกค้าง เพราะว่าตัวอย่างกลุ่มหนึ่งที่มีขนาดเล็กที่ได้มาจากการแจกแจงแบบปกติจะมีพิสัยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีความเกี่ยวพันกันอย่างใกล้ชิด

สมมติว่าเซ็ตของเศษตกค้างสำหรับการทดลองที่มีทรีทเมนต์ 5 ทรีทเมนต์คือ A, B, C, D, E และแต่ละทรีทเมนต์มี 7 ซ้ำ คือ

ทรีทเมนต์ A มีเศษตกค้างคือ +2 , -3 , 0 , -2 , 4 , 1 , -2 พิสัย = 7

ทรีทเมนต์ B มีเศษตกค้างคือ -5 , -2 , 1 , 0 , -2 , 3 , 5 พิสัย = 10

ทรีทเมนต์ C มีเศษตกค้างคือ -3 , 2 , 0 , 1 , 0 , -2 , 2 พิสัย = 5

ทรีทเมนต์ D มีเศษตกค้างคือ -6 , -4 , 0 , 3 , 2 , 3 , 2 พิสัย = 9

ทรีทเมนต์ E มีเศษตกค้างคือ 2 , 0 , -1 , 1 , -2 , 0 , 0 พิสัย = 4

จะเห็นว่ามีความเป็นไปได้ที่ว่าทรีทเมนต์ C และ E มีความผันแปรน้อยกว่าทรีทเมนต์อื่น ๆ และ σ^2 อาจไม่ใช่ค่าคงที่สำหรับค่าสังเกตทั้งหมด

6.6 การตรวจสอบว่าข้อมูลตัวใดเป็น outlier เราอาจมองหาได้ว่าข้อมูลตัวใดเป็น outlier จากเศษตกค้างตัวที่ใหญ่ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือลบก็ตาม ซึ่งจะเสนอแนะให้ข้อมูลของหน่วยนั้นเป็นเหมือนค่าสังเกตที่สูญหายของการทดลอง ตัวอย่างเช่น

ทรีทเมนต์ A มีเศษตกค้างคือ 1 , -2 , 4 , 0 , 2 , -5

ทรีทเมนต์ B มีเศษตกค้างคือ -3 , -5 , 0 , 1 , -2 , 9

ทรีทเมนต์ C มีเศษตกค้างคือ -2 , 3 , -1 , 0 , 2 , -2

จะเห็นได้ว่าในทรีทเมนต์ B มีเศษตกค้างตัวหนึ่งมีค่าบวกอย่างน่าสงสัยคือ 9 ถ้าเป็นไปได้ควรตรวจสอบข้อมูลอีกครั้ง หรืออีกอย่างหนึ่งเราอาจจะตัดข้อมูลตัวนี้ทิ้งไป

แบบฝึกหัดบทที่ 4

จงตอบคำถามต่อไปนี้ในข้อ 1 – 5

ก. จงอธิบายการออกแบบการทดลอง พร้อมวาดรูปประกอบ

ข. จงเขียนตัวแบบสถิติของการทดลอง พร้อมอธิบายแต่ละเทอม

ค. ข้อมูลคืออะไร และจงเขียนรูปแบบข้อมูล

1. การศึกษาระบบการเลี้ยงโคเนื้อร่วมกับการปลูกข้าวโพดฝักอ่อน วัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบปริมาณการกินอาหารในรูปน้ำหนักสดเฉลี่ยต่อตัวต่อวัน ของแม่โคที่กินหญ้ากินี และกินต้นข้าวโพดฝักอ่อน ผู้วิจัยสนใจศึกษาอาหารโค 2 ชนิด คือ หญ้ากินีสดและต้นข้าวโพดฝักอ่อน โคเนื้อที่ใช้ในการทดลองมีทั้งหมด 24 ตัว เป็นโคพันธุ์อเมริกันบราห์มันลูกผสมอายุประมาณ 7 ปี น้ำหนักเฉลี่ย 407.7 กก. ซึ่งแม่พันธุ์ทุกตัวอุ้มท้องประมาณ 5 เดือน แบ่งโคออกเป็น 4 คู่ ๆ ละ 3 ตัว ในแต่ละคู่จะจัดสัตว์ให้มีขนาดรูปร่างและน้ำหนักตัวใกล้เคียงกัน แบ่งโคออกเป็น 2 กลุ่ม การจัดโคเข้าอยู่แต่ละกลุ่มใช้วิธีจับคู่โคที่มีคุณสมบัติใกล้เคียงกันที่สุด แล้วจับสลากแยกกลุ่มโคแต่ละซ้ำอยู่ภายในคอกรวม คอกละ 3 ตัว เก็บข้อมูลโดยชั่งน้ำหนักอาหารที่โคกิน เป็นกิโลกรัมของน้ำหนักสดต่อตัวต่อวัน

2. การทดลองเรื่อง การใช้ต้นถั่วลิสงแห้งเสริมฟางข้าวธรรมดาหรือฟางข้าวปรุงแต่งด้วยยูเรียเป็นอาหารโคพื้นเมือง วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาปริมาณการกินอาหาร 3 สูตร ของโคพื้นเมือง คือ สูตร 1 ฟางข้าวปรุงแต่งด้วยยูเรีย สูตร 2 ฟางข้าวธรรมดาและต้นถั่วลิสง และสูตร 3 ฟางข้าวปรุงแต่งยูเรียและต้นถั่วลิสง ดำเนินการทดลองโดยใช้โคพันธุ์พื้นเมืองขาวลำพูน จากฟาร์มโคพื้นเมืองของมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โคที่ใช้มีน้ำหนักเฉลี่ยประมาณ 137 กิโลกรัม อายุประมาณ 1 – 1 ½ ปี จำนวน 18 ตัว แยกเป็นเพศผู้ 9 ตัว เพศเมีย 9 ตัว แต่ละทรีทเมนต์ทำการทดลองกับโค 6 ตัว เป็นเพศผู้ 3 ตัว เพศเมีย 3 ตัว เก็บข้อมูลเป็นน้ำหนักอาหารที่กินเมื่อคิดเป็นวัตถุแห้ง (กิโลกรัมต่อตัวต่อวัน)

3. การทดลองเรื่องผลของแอคติโนไมซินดิที่ทำให้โครโมโซมในเซลล์โพรงกระดูกของหนูขาวผิดปกติ วัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบจำนวนการแตกหักของโครมาติดที่บริเวณอื่น (นอกจากบริเวณใกล้เซนโตเมียร์ ได้แก่ตอนกลางและตอนปลายของโครมาติด) ภายหลังจากได้รับแอคติโนไมซินดิในขนาดแตกต่างกัน ผู้วิจัยสนใจศึกษาขนาดของแอคติโนไมซินดิ 5 ขนาด คือ 0.0019, 0.0038, 0.0075, 0.0150 และ 0.1250 ไมโครกรัมต่อน้ำหนักตัวของหนู 1 กรัม (mg/g Bω) ผู้วิจัยดำเนินการทดลอง 5 ช่วงเวลา ในแต่ละช่วงเวลาดำเนินการทดลองสารละลายแอคติโนไมซินดิ 5 ขนาด โดยฉีดให้หนูขนาดละตัวโดยสุ่ม แล้วทำการเก็บข้อมูล โดยเก็บเกี่ยวเซลล์ตามวิธีการ จากนั้นนับจำนวนแตกหักของโครโมโซมของหนู

4. การศึกษาผลการใช้อาหารที่มีแทนนินจากข้าวฟ่างในระดับต่าง ๆ ต่อสมรรถภาพของสุกรรุ่น วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลของการใช้ข้าวฟ่างระดับแทนนินต่าง ๆ ที่ใช้ในท้องตลาดในประเทศไทยเป็นส่วนผสมของอาหารสุกรรุ่น – ขุนต่ออัตราการเจริญเติบโต ผู้วิจัยสนใจศึกษาสูตรอาหาร 5 สูตร คือ สูตรอาหารผสมที่มีข้าวฟ่างระดับแทนนิน 0.3%, 0.48%, 0.6%, 0.9% และสูตรอาหารเปรียบเทียบ ดำเนินการทดลองโดยใช้สุกรพันธุ์ลาร์จไวท์ น้ำหนักเฉลี่ยประมาณ 20 กก. เป็นเพศผู้ตอน 20 ตัว และเพศเมีย 20 ตัว สุ่มสุกรในแต่ละเพศเลี้ยงด้วยสูตรอาหารต่าง ๆ 5 สูตร สูตรละ 4 ตัว ในคอกทดลองขังเดี่ยวจำนวนทั้งหมด 40 คอก ๆ ละ 1 ตัว สิ้นสุดการทดลองเมื่อสุกรมีน้ำหนักประมาณ 90 กก. บันทึกอัตราการเจริญเติบโต

5. การศึกษาเรื่องความสามารถในการอยู่รอดในดิน การเข้าอยู่อาศัยในรากข้าวโพดและถั่วลิสงและผลต่อการเจริญเติบโตของข้าวโพด ของเชื้อราเวสลิคูลา อาบัสคุลา ไมคอร์ไรซา มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลของเชื้อราเวสลิคูลา อาบัสคูลา ไมคอร์ไรซา (วี-เอ ไมคอร์ไรซา) ที่เข้าอยู่อาศัยได้ทั้งรากข้าวโพดและถั่วลิสงต่อการเจริญเติบโตของข้าวโพด ผู้วิจัยสนใจศึกษาเชื้อรา วี-เอ ไมเคอร์ไรซา 8 ชนิด คือ
    1. ปลูกเชื้อราวี-เอ ไมคอร์ไรซา
    2. ปลูกเชื้อ <u>caulospora spinosa</u>
    3. ปลูกเชื้อ <u>Glomus aggregatum</u>
    4. ปลูกเชื้อ <u>Sclerocystis rubiformis</u>
    5. ปลูกเชื้อ <u>Scutellospora sp.</u>

6. ปลูกเชื้อ T6 จากเยอรมนี
7. ปลูกเชื้อ A.scrobiculata ที่มีสปอร์ขนาดเล็ก
8. ปลูกเชื้อ A.scrobiculata ที่มีสปอร์ขนาดใหญ่

ผู้วิจัยใช้ดินจากศูนย์วิจัยข้าวโพดและข้าวฟ่างแห่งชาติ อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา จำนวน 4 กระสอบ แต่ละกระสอบนำดินมาทุบให้เป็นก้อนเล็ก แล้วเก็บเศษหิน รากไม้ และเศษพืชต่าง ๆ ออกให้หมด นำดินจากแต่ละกระสอบบรรจุลงในกระถางพลาสติกที่เช็ดด้วยแอลกอฮอล์ 75% กระถางละ 8 กิโลกรัม จำนวน 8 กระถาง ผู้วิจัยสุ่มเชื้อราที่ศึกษาให้แต่ละกระถางจนครบทั้ง 8 ชนิด ดำเนินการเช่นเดียวกันสำหรับดินทั้ง 4 กระสอบ ดำเนินการทดลองโดยขุดดินในกระถางที่เตรียมไว้ให้เป็นหลุมเล็ก ๆ กระถางละ 5 หลุม นำสปอร์ของเชื้อราใส่ลงไปที่ก้นหลุมทุกหลุม แล้วนำเมล็ดข้าวโพดปลูกลงในหลุม ๆ ละ 4 เมล็ด แล้วกลบดินรดด้วยน้ำประปา เมื่อต้นกล้าเจริญเติบโตได้ 1 สัปดาห์ ถอนต้นที่อ่อนแอทิ้งไป เหลือต้นที่แข็งแรงและมีขนาดใกล้เคียงกันกระถางละ 2 ต้น รดน้ำทุกวันเป็นเวลา 70 วัน เก็บข้อมูลโดยเก็บเกี่ยวต้นข้าวโพดจากทุกกระถาง โดยตัดต้นข้าวโพดตรงบริเวณโคนต้นติดกับส่วนบนของรากแล้วทำการชั่งน้ำหนักแห้ง (หน่วยเป็นกรัม)

6. โกศล พวงวิจิตร (2533) ทำการศึกษาเรื่องผลของรังสีแกมมาที่มีต่อทานตะวัน มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเปอร์เซ็นต์การงอกของทานตะวันพันธ์แปซิฟิค 33 ที่ปริมาณรังสีต่าง ๆ 6 ระดับ คือ 0, 5, 10, 15, 20 และ 25 กิโลแรด ทำการทดลองโดยนำเมล็ดทานตะวันที่ฉายรังสีแล้ว ปลูกในกระบะดิน 3 กระบะ แต่ละกระบะดินแบ่งออกเป็น 6 ส่วน ปลูกเมล็ดทานตะวันที่ฉายรังสีปริมาณต่าง ๆ ทั้ง 6 ระดับ ๆ ละ 100 เมล็ด รดน้ำทุกวัน ๆ ละ 2 ครั้ง เช้า-เย็น หลังจากปลูก 7 วัน หาเปอร์เซ็นต์ความงอกได้ข้อมูลดังตาราง

ตาราง แสดงเปอร์เซ็นต์การงอกของทานตะวันพันธ์แปซิฟิก 33 ที่ปริมาณรังสีต่าง ๆ

ปริมาณรังสี (กิโลแรด)	กระบะดิน		
	1	2	3
0	100.00	100.00	100.00
5	98.53	100.00	100.00
10	89.71	97.14	90.36
15	36.76	95.71	86.76
20	17.65	65.71	80.88
25	14.71	48.57	29.41

จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก. จงอธิบายการออกแบบการทดลอง พร้อมวาดรูปประกอบ

ข. จงเขียนตัวแบบสถิติของการทดลอง พร้อมอธิบายแต่ละเทอม

ค. จงเขียนสมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบ แล้วทดสอบสมมติฐานด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนและสรุปผลที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

ง. จงใช้วิธีของดันแคนเปรียบเทียบทรีทเมนต์ทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

จ. จงตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบสถิติ โดยการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

ฉ. จงหาประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก