บทที่ 5

การออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์

1. แผนภาพการทดลองแบบลาตินสแควร์

ในการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก เราได้แยกแหล่งของความแปรปรวนที่เกิดขึ้นอย่างเป็นระบบ 1 แหล่ง ออกมาเป็นเทอมหนึ่งต่างหากในตัวแบบการทดลองแต่บางทีอาจมีแหล่งของความแปรปรวนนี้ 2 แหล่งก็ได้ที่เราควรแยกออกมาในตัวแบบการทดลอง ซึ่งเป็นเรื่องปกติที่มักเกิดขึ้นในงานวิจัยทางอุตสาหกรรม ตัวอย่างเช่น กลุ่มคนทำงานที่แตกต่างกันหรือกะคนทำงานที่มีส่วนในขั้นตอนกระบวนการผลิตสินค้าอาจมีผลต่อคุณภาพของสินค้า หรือการใช้เครื่องจักรหลายตัวในกระบวนการผลิตก็ตามอาจได้ผลผลิตเหมือนกันก็ได้ ตัวอย่างเช่น ทรีทเมนต์ที่สนใจศึกษาอาจเป็นแหล่งของวัตถุดิบ หรือจำนวนของสารประกอบที่เป็นส่วนผสมทางเคมี ทรีทเมนต์เหล่านี้ดูเหมือนว่าไม่เกี่ยวข้องกับเครื่องจักรหรือคนงาน

ตัวแบบการทดลองของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ จะแยกแหล่งของความแปรปรวนที่เกิดขึ้นอย่างเป็นระบบ 2 แหล่ง ก่อนทำการเปรียบเทียบทรีทเมนต์ การออกแบบการทดลองนี้เราเขียนเป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ โดยให้ตัวอักษรแต่ละตัวเกิดขึ้นในแต่ละแถวและแต่ละคอลัมน์เพียงครั้งเดียวเท่านั้น โดยทั่วไปจะเขียนเป็นสแควร์ของตัวอักษรที่เรียงลำดับเป็นมาตรฐานที่แถวแรกและคอลัมน์แรก

ตัวอย่างเช่น

A B	A B C	A B C D	A B C D E	A D C E B F
B A	B C A	B D A C	B C E A D	B A E C F D
2×2	C A B	C A D B	C A D E B	C E D F A B
	3×3	D C B A	D E B C A	D C F B E A
		4×4	E D A B C	F B A D C E
			5×5	E F B A D C
				6×6

ภาพที่ 5.1 ลาตินสแควร์ที่แสดงสแควร์ของตัวอักษรที่เรียงลำดับแบบเป็นมาตรฐาน

สำหรับสแควร์ที่เป็นมาตรฐานขนาด 2×2 หรือ 3×3 จะมีเพียงรูปแบบเดียว แต่สำหรับสแควร์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นคือ 4×4 ขึ้นไปจะมีได้หลายรูปแบบ เราสามารถเลือกใช้ได้โดยดูจากตารางที่ 15 ของ Fisher and Yates (1963) ใช้วิธีการสุ่มแถวและคอลัมน์ สมมติว่าได้สแควร์ 5×5 ดังนี้

B E C A D

A C B D E

E A D B C

C D A E B

D B E C A

แล้วให้ทรีทเมนต์ต่าง ๆ ในการทดลองกำหนดเป็นตัวอักษรต่าง ๆ อย่างสุ่ม มีข้อจำกัดคือ จำนวนทรีทเมนต์ต้องเท่ากับจำนวนของแถว และจำนวนของคอลัมน์ ตัวอย่างเช่น ถ้าใช้เครื่องจักรแตกต่างกัน 5 เครื่อง ในแต่ละวันของสัปดาห์ การเปรียบเทียบทรีทเมนต์ต่าง ๆ 5 ทรีทเมนต์ คือ A, B, C, D, E เราอาจจัดให้เครื่องจักรแต่ละเครื่องแทนแถวแต่ละแถว และกำหนดให้แต่ละวันแทนแต่ละคอลัมน์จะได้ว่า

ที่วัน 1 เครื่องจักร 1 ได้รับทรีทเมนต์ B
2 ได้รับทรีทเมนต์ A
3 ได้รับทรีทเมนต์ E
4 ได้รับทรีทเมนต์ C
5 ได้รับทรีทเมนต์ D

ที่วัน 2 เครื่องจักร 1 ได้รับทรีทเมนต์ E
2 ได้รับทรีทเมนต์ C
3 ได้รับทรีทเมนต์ A
4 ได้รับทรีทเมนต์ D
5 ได้รับทรีทเมนต์ B

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนครบทั้ง 25 หน่วยทดลอง และเก็บข้อมูลจากหน่วยทดลองทั้ง 25 หน่วย

2. การวิเคราะห์ความแปรปรวน

2.1 ตัวแบบสถิติและข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน

ตัวแบบสถิติของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว คือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \rho_j + \kappa_k + \varepsilon_{ijk}$$

เมื่อ y_{ijk} คือ ค่าสังเกตที่ได้จากทรีทเมนต์ที่ i แถวที่ j คอลัมน์ที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งหมด

τ_i คือ อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ i

ρ_j คือ อิทธิพลของบล็อกตัวแรกให้ตัวห้อยเป็น j

κ_k คือ อิทธิพลของบล็อกตัวที่สองให้ตัวห้อยเป็น k

ε_{ijk} คือ เศษตกค้างของการทดลอง ตัวที่ได้รับทรีทเมนต์ i ในแถว j คอลัมน์ k

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนมีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับเศษตกค้าง ε_{ijk} คือ มีการ แจกแจงแบบ $N(0 , \sigma^2)$ และมีข้อจำกัดเกี่ยวกับทรีทเมนต์คือแต่ละทรีทเมนต์ต้องเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียวในแต่ละแถว และในแต่ละคอลัมน์ และทุก ๆ แถวหรือคอลัมน์ที่คอมบิเนชันกันมีหน่วยทดลอง 1 หน่วย ทำให้ทุกเทอมในตัวแบบสถิติเป็นออธอกอนอลกัน และตัวแบบสถิตินี้เป็น completely additive คือไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่างแถว คอลัมน์ และทรีทเมนต์

2.2 สมมติฐานทางสถิติและการวิเคราะห์ความแปรปรวน

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \tau_i = 0 \quad \text{คู่กับ} \quad H_1 : \tau_i > 0$$

การวิเคราะห์ความแปรปรวนโดยการแบ่งผลบวกกำลังสองทั้งหมดของค่าสังเกตจำนวน N เท่ากับ a^2 ค่าสังเกต ออกเป็นส่วน ๆ คือ ผลบวกกำลังสองของแถว, คอลัมน์, ทรีทเมนต์ และความคลาดเคลื่อนของการทดลอง คือ

$$SS_{Total} = SS_{\text{แถว}} + SS_{\text{คอลัมน์}} + SS_{\text{ทรีทเมนต์}} + SS_E$$

ซึ่งมีจำนวนชั้นอิสระสอดคล้องกับผลบวกกำลังสองแต่ละส่วนคือ

$$a^2 - 1 = (a - 1) + (a - 1) + (a - 1) + (a - 2)(a - 1)$$

สถิติที่ใช้ทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คือ

$$F_0 = \frac{MS_{\text{ทรีทเมนต์}}}{MS_E}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ $F_{a-1,(a-2)(a-1)}$

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน ดังนี้

ตารางที่ 5.1 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

Source of variation	d.f.	Sum of squares	Mean Square	F_0
แถว	a - 1	$S_{แถว} - S_0$	$SS_{แถว} / a - 1$	
คอลัมน์	a - 1	$S_{คอลัมน์} - S_0$	$SS_{คอลัมน์} / a - 1$	
ทรีทเมนต์	a - 1	$S_{ทรีทเมนต์} - S_0$	$SS_{Tr} / a - 1$	MS_{Tr} / MS_E
Error	(a - 1)(a - 2)	ได้จากการลบ	$SS_E / (a - 1)(a - 2)$	
Total	$a^2 - 1$	$S - S_0$		

$$E(MS_{Tr}) = \sigma^2 + a\frac{\sum \tau_i^2}{(a-1)}$$

เนื่องจากแถวและคอลัมน์เป็นตัวแทนของข้อจำกัดของการสุ่ม ดังนั้นการทดสอบอิทธิพลของแถวและคอลัมน์จึงไม่เหมาะสม

มีข้อสังเกตว่าในการออกแบบการทดลองที่ดี จำนวนชั้นอิสระของความคลาดเคลื่อนควรมีค่าอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ 10 ถึงแม้ว่าในการทดลองทางอุตสาหกรรมที่มีการควบคุมที่เข้มงวดหรือการทดลองที่ทำในห้องปฏิบัติการที่มีจำนวนชั้นอิสระของความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 6 ก็อาจพอใช้ได้ เนื่องจากสถิติทดสอบเช่น F-test และ t-test จะใช้ได้ไม่ดีเท่าที่ควรถ้าจำนวนชั้นอิสระน้อย ๆ ดังนั้นโดยทั่วไปเราจึงมักออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควขนาด 5×5 ที่มีจำนวนหน่วยทดลองทั้งหมดเท่ากับ 25 หน่วย

2.3 ตัวอย่างการวิเคราะห์ความแปรปรวน

ตัวอย่าง การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว ขนาด 4×4 มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบบริษัทผู้จำหน่ายส่วนประกอบเครื่องรถยนต์ 4 บริษัท คือ บริษัทผู้จำหน่าย A, B, C, D ส่วนประกอบเหล่านี้สามารถใช้ได้กับเครื่องยนต์ที่แตกต่างกัน 4 แบบ สำหรับรุ่นของรถยนต์ที่แตกต่างกัน 4 รุ่น นั่นคือ เครื่องยนต์ทุกแบบสามารถใช้ได้กับรถยนต์ทุกรุ่น จึงต้องทำการทดสอบสมมติฐานนั้น โดยการเก็บข้อมูลความยาวของเวลาในการทำงานของส่วนประกอบ ได้ข้อมูลดังตาราง

ตารางที่ 5.2 ข้อมูลความยาวของเวลาในการทำงานของส่วนประกอบเครื่องรถยนต์

แบบของเครื่องยนต์	(1)	(2)	(3)	(4)	ผลรวม
รุ่นของเครื่องยนต์ (1)	B = 25	A = 31	C = 40	D = 26	122
(2)	A = 32	C = 33	D = 32	B = 34	131
(3)	D = 24	B = 30	A = 36	C = 41	131
(4)	C = 37	D = 28	B = 28	A = 37	130
ผลรวม	118	122	136	138	G = 514

บริษัทผู้จำหน่าย A, มีผลรวมของข้อมูลความยาวของเวลา = 136

บริษัทผู้จำหน่าย B, มีผลรวมของข้อมูลความยาวของเวลา = 117

บริษัทผู้จำหน่าย C, มีผลรวมของข้อมูลความยาวของเวลา = 151

บริษัทผู้จำหน่าย D, มีผลรวมของข้อมูลความยาวของเวลา = 110

$$CT = \frac{514^2}{16}$$

$$= 16512.25$$

การคำนวณผลบวกกำลังสองของแบบของเครื่องยนต์ (คอลัมน์) คือ

$$SS_{\text{เครื่องยนต์}} = \frac{1}{4}(118^2 + 122^2 + 136^2 + 138^2) - CT$$

$$= 16587.00 - 16512.25 = 74.75$$

การคำนวณผลบวกกำลังสองของรุ่นของเครื่องยนต์ (แถว) คือ

$$SS_{\text{รุ่น}} = \frac{1}{4}(122^2 + 131^2 + 131^2 + 130^2) - CT$$

$$= 16526.50 - 16512.25 = 14.25$$

การคำนวณผลบวกกำลังสองของบริษัทผู้จำหน่าย (ทรีทเมนต์) คือ

$$SS_{\text{ทรีทเมนต์}} = \frac{1}{4}(136^2 + 117^2 + 151^2 + 110^2) - CT$$

$$= 16771.50 - 16512.25 = 259.25$$

ในการออกแบบการทดลองมีข้อตกลงเบื้องต้นคือ อิทธิพลของแบบเครื่องยนต์ รุ่นและบริษัทผู้จำหน่ายเป็นอิสระกันทั้งหมด ตัวอย่างเช่น แบบเครื่องยนต์ (1) ถูกทดสอบเพียงครั้งเดียวกับรุ่นของเครื่องยนต์ (1) โดยใช้ส่วนประกอบของบริษัทผู้จำหน่าย B เท่านั้น ดังนั้นในการทดลองนี้มีหน่วยทดลอง 16 หน่วย ได้ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนดังตาราง

ตารางที่ 5.3 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควขนาด 4 × 4

Source of variation	d.f.	Sum of square	Mean square	F_0
แบบเครื่องยนต์(คอลัมน์)	3	74.75	24.917	2.79
รุ่นเครื่องยนต์(แถว)	3	14.25	4.750	<1
บริษัทผู้จำหน่าย(ทรีทเมนต์)	3	259.25	86.417	9.69*
Error	6	53.50	8.917	
Total	15	401.75		

ผลการวิเคราะห์พบว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างบริษัทผู้จำหน่ายส่วน ประกอบเครื่องรถยนต์ เราอาจใช้วิธี lsd เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเป็นรายคู่ โดย
คำนวณค่า lsd จากสูตร

$$t_{(6)}\sqrt{\frac{2 \times 8.917}{4}} \quad = \quad 2.112\, t_{(6)}$$

คำนวณค่า lsd ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และ .01 ได้คือ

α = .05 , lsd = (2.112)(2.45)

= 5.17

α = .01 , lsd = (2.112)(3.71)

= 7.84

ค่าเฉลี่ยของความยาวของเวลาของบริษัทผู้จำหน่ายทั้ง 4 บริษัท เรียงลำดับได้ดังนี้

D = 27.50 , B = 29.25 , A = 34.00 , C = 37.75

ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยพบว่า บริษัทผู้จำหน่าย C มากกว่าบริษัทผู้จำหน่าย D และ B ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ขณะที่บริษัทผู้จำหน่าย A มากกว่าบริษัทผู้จำหน่าย D ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3. คอนทรัสต์

ตัวอย่างการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว สำหรับการออกแบบการทดลองการเก็บรักษาผลแอปเปิ้ลที่แตกต่างกัน 5 วิธี เก็บข้อมูลเปอร์เซ็นต์น้ำหนักที่หายไปของแต่ละกลุ่ม ในระหว่างการเก็บรักษา กลุ่ม A และ B เป็นพันธ์หนึ่ง ส่วนกลุ่ม C, D และ E เป็นอีกพันธ์ หนึ่ง กลุ่ม A และ C เก็บรักษาเป็นระยะเวลาสั้น ส่วนกลุ่ม B และ E ใช้ระยะเวลายาวใน การเก็บรักษา สำหรับกลุ่ม D เก็บรักษาในฝาปิดและใช้ระยะเวลายาว ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควเพื่อควบคุมความแปรปรวนที่อาจเกิดขึ้นได้จากสภาพแวดล้อมในห้องที่ทำการเก็บรักษา โดยให้ตัวแปรทางแถวคือ ความสูงที่แต่ละกลุ่มอยู่เหนือกัน และตัวแปรทางคอลัมน์คือ ระยะห่างจากประตูทางเข้าห้องที่ทำการเก็บรักษา แสดงแผนภาพการทดลองและข้อมูลดังตาราง

ตารางที่5.4 ข้อมูลเปอร์เซ็นต์น้ำหนักที่หายไปของผลแอปเปิ้ลแต่ละกลุ่มที่ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

ชั้นที่วาง	ระยะห่างจากประตู					ผลรวม
	1	2	3	4	5	
1	C : 18.30	B : 35.25	D : 30.32	A : 16.08	E : 42.85	142.80
2	D : 28.05	E : 36.16	A : 17.25	C : 25.90	B : 31.98	139.34
3	A : 25.12	D : 28.55	B : 37.10	E : 38.27	C : 23.68	152.72
4	B : 40.25	C : 22.60	E : 41.15	D : 31.68	A : 22.15	157.83
5	E : 34.24	A : 26.42	C : 15.05	B : 36.52	D : 33.20	145.43
ผลรวม	145.96	148.98	140.87	148.45	153.86	G = 738.12

3.1 การคำนวณผลบวกกำลังสอง

$$CT = \frac{738.12^2}{25}$$

$$= 21792.8454$$

$$SS_{Total} = 23375.9838 - CT$$

$$= 1583.1384$$

$$SS_{แถว} = \frac{1}{5}(142.80^2 + \ldots + 145.43^2) - CT$$

$$= 21838.2136 - 21792.8454$$

$$= 45.3682$$

$$SS_{\text{คอลัมน์}} = \frac{1}{5}(145.96^2 + \ldots + 153.86^2) - CT$$

$$= 21810.8042 - 21792.8454$$

$$= 17.9588$$

ผลรวมเปอร์เซ็นต์น้ำหนักที่หายไปของผลแอปเปิ้ลของแต่ละทรีทเมนต์คือ ทรีทเมนต์ A = 107.02, ทรีทเมนต์ B = 181.10, ทรีทเมนต์ C = 105.53, ทรีทเมนต์ D = 151.80, ทรีทเมนต์ E = 192.67 ดังนั้น คำนวณหา SS_{Tr} ได้คือ

$$SS_{Tr} = \frac{1}{5}(107.02^2 + \ldots + 192.67^2) - CT$$

$$= 23110.4080 - 21792.8454$$

$$= 1317.5626$$

3.2 การสร้างคอนทรัสต์

ตัวอย่างคอนทรัสต์ในการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว เราสามารถสร้าง คอนทรัสต์ได้เท่ากับจำนวนทรีทเมนต์ลบ 1 สำหรับการทดลองการเก็บรักษาผลแอปเปิ้ลที่แตกต่างกัน 5 วิธี เราสามารถสร้างคอนทรัสต์ได้เท่ากับ 5 - 1 = 4 คอนทรัสต์ ผู้วิจัยกำหนดคอนทรัสต์ต่าง ๆ ได้ดังนี้

คอนทรัสต์ 1 : เปรียบเทียบพันธ์ (A, B) กับ พันธ์ (C, D, E)

คอนทรัสต์ 2 : เปรียบเทียบระยะเวลาเก็บรักษาของพันธ์แรกคือ A กับ B

คอนทรัสต์ 3 : เปรียบเทียบระยะเวลาเก็บรักษาของพันธ์ที่สองคือ C กับ (D, E)

คอนทรัสต์ 4 : เปรียบเทียบผลของการเก็บรักษาในฝาปิดของพันธ์ที่สองที่ใช้ระยะเวลายาวในการเก็บรักษาคือ D กับ E

ซึ่งทั้ง 4 คอนทรัสต์นี้ออธอกอนอลกันทั้งหมด สรุปเป็นตารางสัมประสิทธิ์คอนทรัสต์และผลบวกกำลังสองของแต่ละคอนทรัสต์ได้คือ

ตารางที่ 5.5 สัมประสิทธิ์คอนทรัสต์และการคำนวณผลบวกกำลังสองของคอนทรัสต์

ทรีทเมนต์	A	B	C	D	E	ค่า	ตัวหาร	Sum of Square
ผลรวม	107.02	181.10	105.53	151.80	192.67			
คอนทรัสต์ 1	-3	-3	2	2	2	35.64	30×5	8.4681
คอนทรัสต์ 2	-1	1	0	0	0	74.08	2×5	548.7846
คอนทรัสต์ 3	0	0	-2	1	1	133.41	6×5	593.2743
คอนทรัสต์ 4	0	0	0	-1	1	40.87	2×5	167.0357

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตารางที่ 5.6 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

Source of Variation	df	Sum of square	Mean Square	F_0
แถว	4	45.3682	11.342	0.6730
คอลัมน์	4	17.9588	4.490	0.2664
ทรีทเมนต์	4	1317.5627		
คอนทรัสต์ 1	1	8.4681	8.468	0.5024
คอนทรัสต์ 2	1	548.7846	548.785	32.5611***
คอนทรัสต์ 3	1	593.2743	593.274	35.2008***
คอนทรัสต์ 4	1	167.0357	167.036	9.9108**
Error	12	202.2487	16.854	
Total	24	1583.1384		

จากผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าสภาพแวดล้อมในห้องเก็บรักษาผลแอปเปิ้ลไม่มีความแตกต่างกัน และแอปเปิ้ลทั้งสองพันธ์ก็ไม่แตกต่างกัน แต่ระยะเวลาการเก็บรักษาทำให้เปอร์เซ็นต์น้ำหนักที่หายไปแตกต่างกันอย่างมากสำหรับทั้งสองพันธ์ และการเก็บรักษาในฝาปิดก็มีผลต่อเปอร์เซ็นต์น้ำหนักที่หายไป

เราไม่ต้องทดสอบ t-test อีกแล้ว เนื่องจาก การทดสอบ F-test ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ 1 ก็เท่ากับการทดสอบ t-test อยู่แล้ว คือ $F_{(1,f)} = t_{(f)}$

4. การคำนวณหาความคลาดเคลื่อนของการทดลอง

ความคลาดเคลื่อนของการทดลองคำนวณจาก

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

เนื่องจาก $\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\tau}_j + \hat{\beta}_k$

$$= \bar{y}... + (\bar{y}_i.. - \bar{y}...) + (\bar{y}._j. - \bar{y}...) + (\bar{y}.._k - \bar{y}...)$$

$$= \bar{y}_i.. + \bar{y}._j. + \bar{y}.._k - 2\bar{y}...$$

ดังนั้น $e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_i.. - \bar{y}._j. - \bar{y}.._k + 2\bar{y}...$

5. การประมาณค่าสังเกตที่สูญหายสำหรับลาตินสแควขนาด $a \times a$

ค่าสังเกตที่สูญหายประมาณโดย

$$y_{ijk} = \frac{P(y'_{i..} + y'_{.j.} + y'_{..k}) - 2y'_{...}}{(a-2)(a-1)}$$

เมื่อ $y'_{i..}$ คือ ผลรวมของแถวที่ค่าสังเกตหายไป 1 ตัว

$y'_{.j.}$ คือ ผลรวมของทรีทเมนต์ที่ค่าสังเกตหายไป 1 ตัว

$y'_{..k}$ คือ ผลรวมของคอลัมน์ที่ค่าสังเกตหายไป 1 ตัว

$y'_{...}$ คือ ผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมดที่ค่าสังเกตหายไป 1 ตัว

6. การทำซ้ำ

ในการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควถ้ามีเพียง 4 คอลัมน์ หรือ 4 แถว ตัวอย่างเช่น มีเพียง 4 วัน หรือมีเครื่องจักรเพียง 4 เครื่อง และมีทรีทเมนต์ 4 ทรีทเมนต์ เราก็สามารถออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควขนาด 4×4 จำนวน 2 สแควโดยจัดให้เครื่องจักรเครื่องใดเครื่องหนึ่งใน 8 เครื่อง สามารถใช้ใน 4 วัน หรือจัดให้เครื่องจักร 4 เครื่องใช้ใน 8 วัน โดยมีแผนภาพการทดลอง 2 สแควดังนี้

B	D	A	C	A	D	C	B
D	A	C	B	C	B	A	D
C	B	D	A	D	C	B	A
A	C	B	D	B	A	D	C

การวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อเปรียบเทียบทรีทเมนต์ 4 ทรีทเมนต์คือ A, B, C, D มีจำนวนชั้นอิสระของแต่ละเทอมดังนี้

Source of variation	d.f
แถว	3
คอลัมน์	7
ทรีทเมนต์	3
Error	18
Total	31

การคำนวณผลบวกกำลังสองในแต่ละแถวมีค่าสังเกต 8 ตัว ดังนั้น

$$S_{\text{แถว}} = \sum_j R_j^2 / 8$$

การคำนวณผลบวกกำลังสองในแต่ละคอลัมน์มีค่าสังเกต 4 ตัว ดังนั้น

$$S_{\text{คอลัมน์}} = \sum_k C_k^2 / 4$$

ทรีทเมนต์ก็มี 8 ซ้ำด้วย ดังนั้น

$$S_{\text{ทรีทเมนต์}} = \sum_i T_i^2 / 8$$

และการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ 2 ค่า คือ $\sqrt{2s^2/8}$ เมื่อ s^2 ได้มาจาก mean square error ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ 18

การทำซ้ำของลาตินสแควมีหลายกรณีคือ

กรณีที่ 1 ใช้แถวและคอลัมน์เดียวกันในแต่ละซ้ำ

กรณีที่ 2 ใช้แถวเดียวกันแต่แยกคอลัมน์ หรือคอลัมน์เดียวกันแต่แยกแถว

กรณีที่ 3 ใช้แถวและคอลัมน์แยกกันในแต่ละซ้ำ

การวิเคราะห์ความแปรปรวนก็ขึ้นกับแต่ละกรณี สำหรับกรณีที่ 1 ใช้แถวและคอลัมน์เดียวกันในแต่ละซ้ำ จำนวนค่าสังเกตทั้งหมด $N = na^2$ คือ มีสแควเดียว และในแต่ละเซลมีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ ℓ $y_{ijk\ell}$ คือ ค่าสังเกตในทรีทเมนต์ที่ i แถวที่ j คอลัมน์ที่ k และจำนวนซ้ำที่ ℓ

รูปแบบกรณีที่ 1 ใช้แถวและคอลัมน์เดียวกันในแต่ละซ้ำ

	คอลัมน์			
แถว	**1**	**2**	**3**	**4**
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

รูปแบบกรณีที่ 2 ใช้แถวเดียวกันแต่แยกคอลัมน์

	คอลัมน์							
แถว	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	A	B	C	D	A	B	C	D
2	B	C	D	A	B	A	D	C
3	C	D	A	B	C	D	B	A
4	D	A	B	C	D	C	A	B

รูปแบบกรณีที่ 2 ใช้คอลัมน์เดียวกันแต่แยกแถว

	คอลัมน์			
แถว	**1**	**2**	**3**	**4**
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C
5	A	B	C	D
6	B	A	D	C
7	C	D	B	A
8	D	C	A	B

รูปแบบกรณีที่ 3 ใช้แถวและคอลัมน์แยกกันในแต่ละซ้ำ

	คอลัมน์							
แถว	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	A	B	C	D				
2	B	C	D	A				
3	C	D	A	B				
4	D	A	B	C				
5					A	B	C	D
6					B	A	D	C
7					C	D	B	A
8					D	C	A	B

สรุปเป็นตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

6.1 สำหรับกรณีที่ 1 ใช้แถวและคอลัมน์เดียวกันในแต่ละซ้ำ

ตาราง 5.7 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับลาตินสแควที่มีจำนวนซ้ำในกรณีที่ 1 มี 1 สแควร์

Source of Variation	d.f.	Sum of Square	Mean Square	F_0
แถว	$\frac{1}{na}\sum_{j=1}^{a} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	a - 1	$\frac{SS_{แถว}}{a-1}$	
คอลัมน์	$\frac{1}{na}\sum_{k=1}^{a} y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	a - 1	$\frac{SS_{คอลัมน์}}{a-1}$	
ทรีทเมนต์	$\frac{1}{na}\sum_{i=1}^{a} y_{i...}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	a - 1	$\frac{SS_{ทรีทเมนต์}}{a-1}$	$\frac{MS_{ทรีทเมนต์}}{MS_E}$
จำนวนซ้ำ	$\frac{1}{a^2}\sum_{\ell=1}^{n} y_{...\ell}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	n - 1	$\frac{SS_{จำนวนซ้ำ}}{n-1}$	
Error	ได้จากการลบ	(a - 1)[n(a + 1) - 3]	$\frac{SS_E}{(a-1)[n(a+1)-3]}$	
Total	$\sum\sum\sum\sum y_{ijk\ell}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$na^2 - 1$		

6.2 สำหรับกรณีที่ 2

ใช้คอลัมน์เดียวกันแต่แยกแถวคือ ใช้คอลัมน์ร่วมกันทุกสแควร์ การสุ่มในแต่ละสแควร์ก็ทำแยกกัน เพียงแต่ต้องระวังว่าให้มี s ทรีทเมนต์ เท่านั้นในแต่ละคอลัมน์ และในแต่ละแถว มีเพียง 1 ทรีทเมนต์เท่านั้น เช่น ตัวอย่างใช้เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงานคนเดิมแต่ใช้รุ่นของวัตถุดิบใหม่ในแต่ละซ้ำ สรุปตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 5.8 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับลาตินสแควที่มีจำนวนซ้ำในกรณีที่ 2

Source of Variation	d.f.	Sum of Square	Mean Square	F_0
แถว	$\frac{1}{na}\sum_{j=1}^{a} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	a - 1	$\frac{SS_{\text{แถว}}}{a-1}$	
คอลัมน์	$\frac{1}{na}\sum_{k=1}^{a} y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	a - 1	$\frac{SS_{\text{คอลัมน์}}}{a-1}$	
ทรีทเมนต์	$\frac{1}{a}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{a} y_{i...\ell}^2 - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{y_{...\ell}^2}{a^2}$	n(a - 1)	$\frac{SS_{\text{ทรีทเมนต์}}}{n(a-1)}$	$\frac{MS_{\text{ทรีทเมนต์}}}{MS_E}$
จำนวนซ้ำ	$\frac{1}{a^2}n\sum_{\ell=1}^{n} y_{...\ell}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	n - 1	$\frac{SS_{\text{จำนวนซ้ำ}}}{n-1}$	
Error	ได้จากการลบ	(a - 1)(na - 1)	$\frac{SS_E}{(a-1)(na-1)}$	
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_\ell y_{ijk\ell}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$na^2 - 1$		

6.3 สำหรับกรณีที่ 3

ใช้แถวและคอลัมน์แยกกันในแต่ละซ้ำจะมี s สแคว การสุ่มในแต่ละ สแควจะทำแยกกัน เช่นตัวอย่างในรุ่นของวัตถุดิบใหม่และใช้เจ้าหน้าที่คนใหม่ในแต่ละซ้ำ สรุปตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 5.9 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับลาตินสแควที่มีจำนวนซ้ำในกรณีที่ 3

Source of Variation	d.f.	Sum of Square	Mean Square	F_0
แถว	$\frac{1}{na}\sum_{j=1}^{a} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	a - 1	$\frac{SS_{แถว}}{a-1}$	
คอลัมน์	$\frac{1}{a}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{a} y_{..k\ell}^2 - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{y_{...\ell}^2}{N}$	n(a - 1)	$\frac{SS_{คอลัมน์}}{n(a-1)}$	
ทรีทเมนต์	$\frac{1}{a}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{a} y_{i..\ell}^2 - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{y_{...\ell}^2}{a^2}$	n(a - 1)	$\frac{SS_{ทรีทเมนต์}}{n(a-1)}$	$\frac{MS_{ทรีทเมนต์}}{MS_E}$
จำนวนซ้ำ	$\frac{1}{a^2}\sum_{\ell=1}^{n} y_{...\ell}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	n - 1	$\frac{SS_{จำนวนซ้ำ}}{n-1}$	
Error	ได้จากการลบ	(a - 1)[n(a - 1) - 1]	$\frac{SS_E}{(a-1)[n(a-1)-1]}$	
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_\ell y_{ijk\ell}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$na^2 - 1$		

6.4 ตัวอย่าง 3 × 3 สแควร์ ที่มี 2 ซ้ำ

การทดลองหนึ่งดำเนินการทดลอง 6 วัน ใช้เครื่องจักร 3 ตัว ในการทำงานคือ A, B และ C เครื่องจักรแต่ละตัวต้องทำงานที่ความเร็ว 3 ระดับคือ ความเร็วสูง, ความเร็วปานกลาง และความเร็วต่ำ ทดลองผลิตสินค้าจำนวนมาก แล้วทำการเก็บข้อมูลโดยการนับจำนวนครั้งที่เครื่องจักรมีเสียงผิดปกติ ในการผลิตสินค้าจำนวนตามที่กำหนดได้ข้อมูลดังตาราง

ตาราง5.10 ข้อมูลจำนวนครั้งที่เกิดเสียงผิดปกติของเครื่องจักรที่ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ ขนาด 3 × 3 สแควร์ทำการทดลอง 2 ซ้ำ

ความเร็ว	วัน						ผลรวม
	1	2	3	4	5	6	
สูง	B : 39	C : 31	A : 32	C : 58	A : 40	B : 53	253
กลาง	A : 52	A : 29	B : 37	B : 41	C : 80	C : 88	327
ต่ำ	C : 89	B : 61	C : 62	A : 63	B : 99	A : 43	417
ผลรวม	180	121	131	162	219	184	G = 997

การคำนวณผลบวกกำลังสอง

$$CT = \frac{997^2}{18}$$

$$= 55222.72$$

$$SS_{Total} = 63123.00 - 55222.72$$

$$= 7900.28$$

ผลรวมจำนวนครั้งที่เกิดเสียงผิดปกติของเครื่องจักรแต่ละตัวคือ A = 259 , B = 330 , และ C = 408

$$SS_{\text{เครื่องจักร}} = \frac{1}{6}(259^2 + 330^2 + 408^2) - CT$$

$$= 57074.17 - 55222.72$$

$$= 1851.45$$

$$SS_{\text{ความเร็ว}} = \frac{1}{6}(253^2 + 327^2 + 417^2) - CT$$

$$= 57471.167 - 55222.72$$

$$= 2248.44$$

$$SS_{วัน} = \frac{1}{3}(180^2 + 121^2 + \ldots + 184^2) - CT$$

$$= 57421.000 - 55222.72$$

$$= 2198.28$$

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนดังนี้

ตาราง5.11 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของเครื่องจักรที่ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

Source of Variation	d.f.	Sum of Square	Mean Square	F_0
ความเร็ว	2	2248.44	1124.22	5.61*
วัน	5	2198.28	439.66	2.20 (n.s.)
เครื่องจักร	2	1851.45	925.72	4.62*
Error	8	1602.11	200.26	
Total	17	7900.28		

จากผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่า ไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปได้ว่าวันมีผลต่อการทำงานของเครื่องจักรแตกต่างกัน แต่ความเร็วและเครื่องจักรทั้งสองตัวแปรนี้มีผลต่อการทำงานของเครื่องจักร ชัดเจนคือ เครื่องจักร C ที่ความเร็วต่ำให้ผลการทำงานดีที่สุดในการทดลองนี้

7. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ประมาณด้วย

$$S_{\bar{y}_j} = \sqrt{\frac{MS_E}{sa}}$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของ 2 ทรีทเมนต์ประมาณด้วย

$$S_{(\bar{y}_j - \bar{y}_h)} = \sqrt{\frac{2MS_E}{sa}}$$

เมื่อ s คือ จำนวนสแคว

a คือ จำนวนทรีทเมนต์

8. การหาประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

เปรียบเทียบประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว (LS) กับแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก (RCB)

$$R = \frac{MS_E(RCB) + (n_1+1)(n_2+3)}{MS_E(LS)(n_1+3)(n_2+1)} \times 100$$

เมื่อ n_1 คือ df ของ LS

n_2 คือ df ของ RCB

ถ้าแถวคือบล็อก

$$\text{ประมาณ } MS_E(RCB) = \frac{n_c MS_{\text{คอลัมน์}} + (n_t + n_e)MS_E(LS)}{n_c + n_t + n_e}$$

ถ้าคอลัมน์คือบล็อก

$$\text{ประมาณ } MS_E(RCB) = \frac{n_r MS_{\text{แถว}} + (n_t + n_e)MS_E(LS)}{n_r + n_t + n_e}$$

เมื่อ n_r คือ df ของแถวใน LS

n_c คือ df ของคอลัมน์ใน LS

n_t คือ df ของทรีทเมนต์ใน LS

n_e คือ df ของ error ใน LS

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. การศึกษาอิทธิพลของพันธ์แม่สุกร (A, B, C, D) ต่อน้ำหนักของลูกสุกร โดยที่แม่สุกรมีน้ำหนักแตกต่างกัน 4 ระดับ คือ 60, 70, 80 และ 90 กิโลกรัม และแม่สุกรแต่ละตัวมีอายุแตกต่างกันคือ 1 ปี 2 ปี 3 ปี และ 4 ปี นักวิจัยจึงออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว โดยทำการควบคุมอิทธิพลของอายุและน้ำหนักของแม่สุกร ผู้วิจัยเก็บข้อมูลโดยการวัดน้ำหนักของลูกสุกรเป็นกิโลกรัม ได้ข้อมูลดังตาราง จงวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลและสรุปผลที่ระดับนัยสำคัญ α = .05

   ตาราง น้ำหนักลูกสุกรที่แม่สุกรมีพันธ์แตกต่างกัน

อายุ (ปี)	น้ำหนัก			
	60	70	80	90
1	A = 6	B = 12	C = 11	D = 10
2	B = 8	D = 8	A = 11	C = 10
3	C = 9	A = 9	D = 7	B = 11
4	D = 9	C = 10	B = 11	A = 6

2. การศึกษาผลของสารป้องกันกำจัดแมลงดีลดรินต่อการเจริญเติบโตของข้าวโพด ผู้วิจัยสนใจศึกษาสารละลายดีลดรินที่ความเข้มข้น 1, 10, 20 และ 40 กรัมต่อน้ำ 20 ลิตร แทนด้วยอักษร A, B, C และ D ตามลำดับ ดำเนินการทดลองโดยปลูกข้าวโพดในแปลง 4 แปลง ในแต่ละแปลงแบ่งออกเป็น 4 แปลงย่อย แต่ละแปลงย่อยจะได้รับสารดีลดรินหลังจากหยอดเมล็ด แล้วรดด้วยสารละลายดีลดรินความเข้มข้น 1, 10, 20 และ 40 กรัมต่อน้ำ 20 ลิตร โดยสุ่ม แล้วเก็บข้อมูลการเจริญเติบโตของข้าวโพด โดยวัดจากผิวดินถึงข้อใบวัดเป็นเซนติเมตร เนื่องจากใน 1 วัน สามารถเก็บข้อมูลได้เพียง 4 แปลงย่อยเท่านั้น ผู้วิจัยวัดการเจริญเติบโตของต้นข้าวโพดในวันที่ 14, 21, 28 และ 25 วัน หลังจากเริ่มทดลอง ผู้วิจัยทราบว่า เจ้าหน้าที่ปฏิบัติงานแต่ละคนอาจมีผลกระทบต่อผลการทดลอง และการเก็บข้อมูลในวันที่แตกต่างกันมีผลต่อความสูงของต้นข้าวโพด ผู้วิจัยจึงออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว โดยทำการควบคุม อิทธิพลของเจ้าหน้าที่และวัน ได้ข้อมูลความสูงของต้นข้าวโพดดังตาราง จงวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลและสรุปผลการทดลองที่ระดับนัยสำคัญ α = .05

ตาราง ความสูงของต้นข้าวโพดที่ได้รับสารละลายดีลดรินความเข้มข้นแตกต่างกัน

วัน	เจ้าหน้าที่			
	1	2	3	4
14	C = 26.98	D = 27.29	A = 35.03	B = 43.62
21	B = 43.06	C = 43.67	D = 59.50	A = 53.07
28	A = 57.08	B = 57.21	C = 81.79	D = 73.71
35	D = 68.19	A = 58.42	B = 99.27	C = 88.52

จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก. จงเขียนตัวแบบสถิติของการทดลอง พร้อมอธิบายแต่ละเทอม

ข. จงวิเคราะห์ความแปรปรวนและสรุปผลการทดลอง

ค. คำนวณหาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของสารละลายดีลดริน

ง. คำนวณหาประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว

3. การศึกษาอิทธิพลของปุ๋ยสูตรต่าง ๆ (A, B, C, D0 ที่มีผลต่อความยาวของต้นถั่วฝักยาว ผู้วิจัยทราบว่าวันปลูกและแปลงปลูกอาจมีผลกระทบกับผลการทดลอง ผู้วิจัยจึงออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว ดำเนินการทดลองโดยปลูกถั่วฝักยาว 4 ระยะ คือ ระยะที่ 1 ปลูกวันที่ 28 ธันวาคม และเก็บเกี่ยววันที่ 1 มีนาคม ระยะที่ 2 ปลูกวันที่ 28 มกราคม และเก็บเกี่ยววันที่ 25 มีนาคม ระยะที่ 3 ปลูกวันที่ 28 กุมภาพันธ์ และเก็บเกี่ยววันที่ 25 เมษายน ระยะที่ 4 ปลูกวันที่ 28 มีนาคม และเก็บเกี่ยววันที่ 23 พฤษภาคม ในแต่ละระยะทำการปลูกต้นถั่วฝักยาว 4 แปลง ในแต่ละแปลงได้รับปุ๋ยสูตรใดสูตรหนึ่งโดยสุ่ม เมื่อต้นถั่วฝักยาวอายุ 10 สัปดาห์ วัดความยาวของลำต้นหลักจากโคนต้นถึงปลายยอดเป็นเซนติเมตร ได้ข้อมูลดังตาราง

ตาราง ความยาวของต้นถั่วฝักยาวที่ได้รับปุ๋ยต่างกัน (เซนติเมตร)

วันปลูก	แปลง			
	1	2	3	4
28 ธ.ค.	A = 77.75	C = 50.87	B = 132.58	D = 97.51
28 ม.ค.	C = 54.62	B = 95.82	D = 133.91	A = 76.65
28 ก.พ	B = 135.36	D = 53.28	A = 97.26	C = 78.39
28 มี.ค.	D = 96.29	A = 76.45	C = 55.39	B = 132.39

4. การศึกษาอิทธิพลของส่วนผสมที่แตกต่างกัน 5 ชนิด (A, B, C, D, E) ต่อเวลาที่แสดงปฏิกิริยาของกระบวนการทางเคมี เนื่องจากวัตถุดิบแต่ละรุ่นมีพอสำหรับ 5 การทดลองเท่านั้น นอกจากนี้ใน 1 วัน สามารถทำการทดลองได้ 5 การทดลองเท่านั้น ผู้วิจัยจึงตัดสินใจออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว โดยทำการควบคุมอิทธิพลของวันและรุ่นของวัตถุดิบ เก็บข้อมูลได้ดังตาราง จงวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลที่ระดับนัยสำคัญ α = .05 และสรุปผลการทดลอง

รุ่นของวัตถุดิบ	วัน				
	1	2	3	4	5
1	A = 1	B = 3	D = 7	C = 1	E = 8
2	C = 3	E = 7	A = 3	D = 11	B = 2
3	B = 1	A = 5	C = 5	E = 9	D = 10
4	D = 8	C = 6	E = 10	B = 6	A = 6
5	E = 8	D = 8	B = 4	A = 2	C = 2

5. ในการศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการทางเคมีซึ่งใช้วัตถุดิบ 5 รุ่น กรดความเข้มข้นต่าง ๆ 5 ระดับ standing time 5 ระดับ (A, B, C, D, E) และความเข้มข้นของตัวเร่งปฏิกิริยา 5 ระดับ (α, β, γ, δ, ε) ออกแบบการทดลองแบบ Craeco - Latin square จงวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลที่ระดับนัยสำคัญ α = .05 และสรุปผลการทดลอง

รุ่นของวัตถุดิบ	ความเข้มข้นของกรด				
	1	2	3	4	5
1	$A\alpha = 10$	$B\beta = 12$	$C\gamma = 19$	$D\delta = 14$	$E\varepsilon = 22$
2	$B\gamma = 15$	$C\delta = 21$	$D\varepsilon = 17$	$E\alpha = 25$	$A\beta = 13$
3	$C\varepsilon = 20$	$D\alpha = 16$	$E\beta = 20$	$A\gamma = 11$	$B\delta = 14$
4	$D\beta = 18$	$E\gamma = 25$	$A\delta = 16$	$B\varepsilon = 16$	$C\alpha = 17$
5	$E\delta = 26$	$A\varepsilon = 15$	$B\alpha = 18$	$C\beta = 17$	$D\gamma = 14$