บทที่ 6
การทดลองแฟกทอเรียล

1. วัตถุประสงค์ของการทดลองแฟกทอเรียล

ถ้าการทดลองหนึ่งมีตัวแปรที่เราสนใจศึกษามากกว่า 1 ตัวแปร ซึ่งมักจะเรียกตัวแปรที่สนใจศึกษาว่า ปัจจัย การทดลองที่มีปัจจัยตั้งแต่ 2 ปัจจัยขึ้นไปนี้เรียกว่า การทดลองแฟกทอเรียล มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาอิทธิพลของปัจจัยตั้งแต่ 2 ปัจจัยขึ้นไป เราแบ่ง 2 ปัจจัย ออกเป็น 2 แบบ คือ ปัจจัยกำหนด (fixed factor) และปัจจัยสุ่ม (random factor) สัญลักษณ์ที่ใช้แทนปัจจัยจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ A, B, C,…

ในการออกแบบการทดลองที่อธิบายแล้วในบทก่อนหน้านี้มีปัจจัยเดียวในการทดลอง ระดับของปัจจัยในการทดลองนั้นคือทรีทเมนต์ แต่สำหรับในการทดลองแฟกทอเรียลที่มีหลายปัจจัยโดยที่แต่ละปัจจัยมีหลายระดับนั้น ทรีทเมนต์ของการทดลองคิดได้จากจำนวนระดับของแต่ละปัจจัยคูณกันคิดเป็นทรีทเมนต์คอมบิเนชัน

ตัวอย่างเช่น ในการทดลองมี 2 ปัจจัย คือ ปัจจัย A และ B โดยที่ปัจจัย A มี 2 ระดับคือ a_1 และ a_2 และปัจจัย B มี 4 ระดับคือ b_1, b_2, b_3 และ b_4 สามารถคิดเป็นทรีทเมนต์คอมบิเนชันได้ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 การคิดทรีทเมนต์คอมบิเนชันของ 2 ปัจจัย

ปัจจัย A	ปัจจัย B			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4
a_2	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4

การทดลองมี 8 ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน คือ

$$a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_1b_4,$$
$$a_2b_1, a_2,b_2, a_2b_3, a_2b_4$$

วัตถุประสงค์ของการทดลองคือ ต้องการดูอิทธิพลของปัจจัยแต่ละตัว การทำการทดลองหนึ่ง ๆ เพื่อดูอิทธิพลของปัจจัยตัวเดียว เมื่อต้องทำการทดลองหลาย ๆ การทดลองเพื่อดูอิทธิพลของปัจจัยทีละตัวก็จะเสียเวลามาก เสียงบประมาณมาก ดังนั้นการทดลองแบบแฟกทอเรียลก็จะทำให้การทดลองครั้งเดียวสามารถดูอิทธิพลของปัจจัยหลาย ๆ ตัวได้พร้อมกันทีเดียว

2. อิทธิพลของปัจจัยในการทดลองแฟกทอเรียล

เมื่อในการทดลองมีปัจจัยที่สนใจศึกษาหลายปัจจัย และอยากทราบว่าปัจจัยเหล่านั้นเป็นอิสระกัน หรือมีปฏิสัมพันธ์กัน การตอบปัญหานี้ต้องดูว่าคอมบิเนชันของระดับของปัจจัยใดที่ให้ผลดี และที่ให้ผลไม่ดี ตัวอย่างเช่น การใช้ปุ๋ยในการทดลองทางการเกษตร เราต้องการหาคำตอบคือปุ๋ยชนิดใดที่จะให้ผลผลิตสูง เช่น ไนโตรเจน (N) ฟอสฟอรัส (P) และโปแตสเซียม (K) ซึ่งเราไม่ทราบว่าควรใช้ปุ๋ยต่าง ๆ เหล่านี้อัตราส่วนเท่าใดจึงจะได้ผลผลิตดีในพื้นที่แปลงใหม่ สมมติให้องค์ประกอบของปุ๋ยเหล่านี้เป็นปัจจัย ทรีทเมนต์ของการทดลองเกิดจากการคอมบิเนชันระดับของปัจจัยเหล่านี้ แต่ดูเหมือนว่าปัจจัยเหล่านี้ไม่เป็นอิสระกัน ตัวอย่างเช่น ถ้ามีปัจจัย 2 ปัจจัยคือ N และ P แต่ละปัจจัยใช้เพียง 2 ระดับ คือ ระดับต่ำ แทนด้วย 0 และระดับสูง แทนด้วย 1 เราสามารถเขียนเป็นทรีทเมนต์คอมบิเนชันได้คือ $N_0P_0, N_0P_1, N_1P_0, N_1P_1$

สมมติว่าถ้าทรีทเมนต์ N_0P_0 ให้ผลผลิต 5 หน่วย

และทรีทเมนต์ N_1P_0 ให้ผลผลิต 20 หน่วย

จะเห็นว่าได้ผลผลิตเพิ่มขึ้น 15 หน่วย เมื่อเพิ่มระดับของปัจจัย N โดยที่ปัจจัย P คงที่

ในทำนองเดียวกัน

สมมติว่า N_0P_1 ให้ผลผลิต 12 หน่วย

จะเห็นว่าได้ผลผลิตเพิ่มขึ้น 7 หน่วย เมื่อเพิ่มระดับของปัจจัย P โดยที่ปัจจัย N คงที่

ทำให้สงสัยว่า ภายใต้ทรีทเมนต์ N_1P_1 จะได้ผลอย่างไร

ถ้า N และ P เป็นอิสระกัน จะได้ผลผลิต เท่ากับ

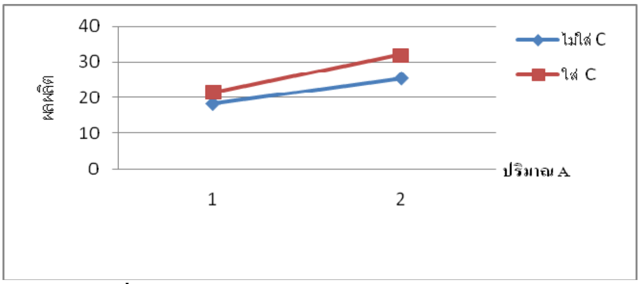
ผลของ N_0P_0 + ผลที่เพิ่มขึ้นเนื่องจาก N อย่างเดียว + ผลที่เพิ่มขึ้นเนื่องจาก P อย่างเดียว = 5 + 15 + 7 = 27 หน่วย

แต่ถ้าสมมติว่าจากการทดลองทรีทเมนต์ N_1P_1 ได้ผลผลิตเท่ากับ 40 หน่วย ดังนั้นจะได้ว่ามีปฏิสัมพันธ์เท่ากับ 13 หน่วย จากการเพิ่มอิทธิพลของทั้ง 2 ปัจจัยนั้น เราอาจเรียกว่าปฏิสัมพันธ์เชิงบวก แต่ก็เป็นไปได้ที่อาจจะเกิดปฏิสัมพันธ์เชิงลบ เมื่อระดับสูงของปัจจัยหนึ่งทำให้อีกปัจจัยหนึ่งผลผลิตตกต่ำลง

ตัวอย่างกราฟปฏิสัมพันธ์ สมมติให้ข้อมูลผลของปฏิกิริยาเคมีขึ้นกับปริมาณของปัจจัย A ซึ่งอยู่ในส่วนประกอบ และการใส่หรือไม่ใส่คะตะไลซ์ C ได้ผลการทดลองเป็นค่าเฉลี่ยของแต่ละทรีทเมนต์คือ

ปัจจัย A	ต่ำ	สูง
ปัจจัย C : ไม่ใส่	18.4	25.5
ใส่	21.6	32.0

พล็อตกราฟของค่าเฉลี่ย 4 ค่านี้ เพื่อทำให้เห็นผลการทดลองได้ชัดเจนขึ้นดังนี้



ภาพที่ 6.1 แสดงปฏิสัมพันธ์ของปัจจัย A และ C

จากภาพที่ 6.1 ให้ปัจจัย A อยู่บนแกนนอน และแกนตั้งเป็นปริมาณผลของปฏิกิริยา ลากเส้นของผลของปฏิกิริยาเมื่อใส่ และไม่ใส่คะตะไลซ์ C กราฟแสดงให้เห็นได้ชัดเจนว่าเส้น 2 เส้นนี้ไม่ขนานกัน โดยที่การเพิ่มปริมาณของ A จากระดับต่ำเป็นระดับสูง เมื่อไม่ใส่คะตะไลซ์ C ทำให้ผลของปฏิกิริยาเพิ่มขึ้นน้อยกว่าเมื่อใส่คะตะไลซ์ C ถ้าไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยทั้งสองนี้เส้นทั้ง 2 เส้นจะขนานกันหรือค่อนข้างขนานกัน เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของผลบนปัจจัยหนึ่งเท่ากันที่ระดับใด ๆ ของอีกปัจจัยหนึ่ง

การทดลองแฟกทอเรียลจะทำให้สามารถหาอิทธิพลของปัจจัยแต่ละตัวและความ สัมพันธ์ระหว่างปัจจัยซึ่งการทดลองที่มีปัจจัยเดียวไม่สามารถหาได้ และนักวิจัยจะพบว่าการอธิบายผลของการทดลองแฟกทอเรียลทำได้ยาก

เมื่อมีปัจจัยหลายตัวในการทดลองทำให้มีอิทธิพลของปัจจัย 3 ประเภท คือ

1. อิทธิพลอย่างง่าย (simple effect)
2. อิทธิพลหลัก (main effect)
3. อิทธิพลร่วมหรือปฏิสัมพันธ์ (interaction effect)

ตัวอย่างที่ 1 สมฤดี ทรัพย์สะสม (2534) ทำการศึกษาเรื่องการปลิดดอกและผลของเงาะด้วย ethephon โดยสนใจศึกษาอิทธิพลของอายุช่อดอกในระยะที่ใช้ทำ thining ซึ่งมี 2 ระยะ คือ ระยะช่อดอกบานประมาณ 80% และระยะที่ติดผลอ่อนขนาด 4 มม. และสนใจศึกษาอิทธิพลของความเข้มข้นของ ethephon (เนื้อสาร 480 กรัม/ลิตร) ซึ่งมี 4 ระดับ คือ 0, 100, 200 และ 300 ppm. การคิดทรีทเมนต์คอมบิเนชั่นเท่ากับ 2 $\times$ 4 = 8 ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน หลังจากพ่นสาร ethephon แล้วหุ้มช่อดอกด้วยถุงผ้ามุ้งแล้วนับจำนวนดอกและผลที่

ตาราง 6.2 เปอร์เซ็นต์การร่วงของดอกและผลอ่อนเงาะที่พ่นด้วย ethephon ในระยะดอกบานและติดผลอ่อน

อายุช่อดอก	ความเข้มข้นของ ethephon (ppm.)				ค่าเฉลี่ย
	0	**100**	**200**	**300**	
ระยะช่อดอกบาน 80%	68.8	76.0	74.4	87.4	76.65
ระยะติดผลอ่อน	89.2	91.8	78.0	92.6	87.9
ค่าเฉลี่ย	79.0	83.9	76.2	90.0	

ถ้าให้ A แทนอายุของช่อดอก มี 2 ระดับ คือ a_1, a_2

B แทนความเข้มข้นของ ethephon มี 4 ระดับ คือ b_1, b_2, b_3, b_4

2.1 อิทธิพลอย่างง่าย

คือ ความแตกต่างของอิทธิพลของปัจจัยหนึ่ง ตัวอย่างอิทธิพลอย่างง่ายของอายุช่อดอก จากตาราง 6.2 ปัจจัยอายุของช่อดอกทั้ง 2 ระดับ มีความแตกต่างระหว่าง 4 ระดับของปัจจัยความเข้มข้นของ ethephon

คำนวณหาอิทธิพลอย่างง่ายของอายุช่อดอก หลังจากพ่นสาร ethephon ที่ความเข้มข้นระดับต่าง ๆ ดังนี้

ที่ความเข้มข้น 0, $\ell_1 = \mu_{21} - \mu_{11} = 89.2 - 68.8 = 20.4$

ที่ความเข้มข้น 100, $\ell_2 = \mu_{22} - \mu_{12} = 91.8 - 76.0 = 15.8$

ที่ความเข้มข้น 200, $\ell_3 = \mu_{23} - \mu_{13} = 78.0 - 74.4 = 3.6$

ที่ความเข้มข้น 300, $\ell_4 = \mu_{24} - \mu_{14} = 92.6 - 87.4 = 5.2$

2.2 อิทธิพลหลัก

คือ อิทธิพลเฉลี่ยของปัจจัยหนึ่งคำนวณจากค่าแตกต่างระหว่างระดับของปัจจัยหนึ่งที่ได้จากค่าเฉลี่ยของทุกระดับของปัจจัยอื่น

จากตาราง6.2 อิทธิพลหลักของปัจจัยอายุของช่อดอกคำนวณจาก

$$\ell_5 = \frac{1}{4}(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)$$

$$= \frac{1}{4}(20.4 + 15.8 + 3.6 + 5.2)$$

$$= 11.25$$

แสดงว่าช่อดอกระยะติดผลอ่อนร่วงมากกว่าระยะช่อดอกบาน

2.3 อิทธิพลร่วม

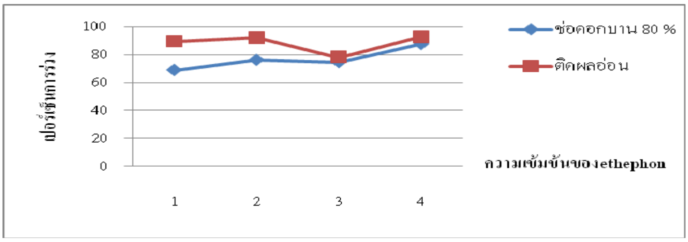
คือ ค่าแตกต่างของผลการทดลองระหว่างระดับของปัจจัยหนึ่งไม่เท่ากันบนทุกระดับของปัจจัยอื่น หมายความว่าปัจจัยต่าง ๆ เหล่านั้นไม่เป็นอิสระกัน

จากตาราง6.2ในตัวอย่าง อิทธิพลร่วมระหว่างอายุช่อดอกกับความเข้มข้นของ ethephon คำนวณได้ดังนี้

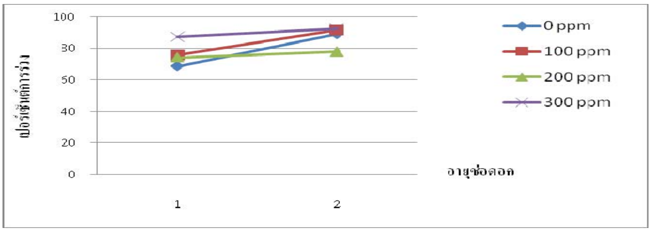
ความเข้มข้นของ ethephon	อิทธิพลอย่างง่ายของอายุช่อดอก
0	ℓ_1 = 89.2 - 68.8 = 20.4
100	ℓ_2 = 91.8 - 76.0 = 15.8
200	ℓ_3 = 78.0 - 74.4 = 3.6
300	ℓ_4 = 92.6 - 87.4 = 5.2

จะเห็นว่าอิทธิพลของอายุช่อดอกขึ้นกับระดับของปัจจัยความเข้มข้นของ ethephon แสดงว่าปัจจัยช่อดอกและปัจจัยอายุความเข้มข้นของ ethephon มีความสัมพันธ์กัน ดังนั้นอิทธิพลร่วมของปัจจัย A และ B คือ ค่าเฉลี่ยของความแตกต่างของอิทธิพลของปัจจัย A

เมื่อเอาข้อมูลมาพล็อตกราฟจะได้เส้นกราฟที่ไม่ขนานกันดังภาพ



ภาพ 6.2 กราฟแสดงอิทธิพลอย่างง่ายของอายุช่อดอก



ภาพ 6.3 กราฟแสดงอิทธิพลอย่างง่ายของความเข้มข้นของ ethephon

สรุปได้ว่ามีอิทธิพลร่วมระหว่าง 2 ปัจจัย ถ้าปัจจัยหนึ่งเปลี่ยนจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งแล้วทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของค่าสังเกตของอีกปัจจัยหนึ่งที่ระดับหนึ่งแตกต่างจากระดับอื่น ๆ ของปัจจัยที่สองนี้

3. การทดลองแฟกทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย เป็นปัจจัยกำหนดออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

ตัวอย่างการศึกษาทางการตลาดที่ต้องการศึกษาอิทธิพลของเครื่องหมายการค้าและตำแหน่งของชั้นวางสินค้าต่อผลการขายสินค้าชนิดหนึ่ง ปัจจัยเครื่องหมายการค้าที่มี 2 ยี่ห้อ คือยี่ห้อ 1 และยี่ห้อ 2 และอีกปัจจัยหนึ่งคือตำแหน่งชั้นวางสินค้าที่มี 3 ตำแหน่งคือ ชั้นพื้นล่าง ชั้นกลาง และชั้นบนสุด ดังนั้นการคิดทรีทเมนต์เท่ากับ $2 \times 3 = 6$ ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน เก็บข้อมูลยอดจำหน่ายสินค้า โดยการสุ่มยอดจำหน่ายสินค้าทรีทเมนต์ละ 3 สัปดาห์ คิดเป็นยอดจำหน่ายสินค้าทั้งหมด 18 สัปดาห์ แสดงเป็นแผนภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ได้ดังนี้

ตำแหน่งชั้นวางสินค้า	เครื่องหมายสินค้า	
	ยี่ห้อ 1	ยี่ห้อ 2
ชั้นบนสุด	สัปดาห์ 1 9 14	สัปดาห์ 3 8 18
ชั้นกลาง	สัปดาห์ 5 10 13	สัปดาห์ 4 12 17
ชั้นพื้นล่าง	สัปดาห์ 2 7 16	สัปดาห์ 6 11 15

ภาพ การทดลอง 2×3 แฟกทอเรียล ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

หน่วยทดลองคือ ช่วงเวลา 1 สัปดาห์ เนื่องจากเราเก็บข้อมูลยอดจำหน่ายสินค้าในแต่ละสัปดาห์ตลอดระยะเวลาที่ทำการศึกษา 18 สัปดาห์

ตัวแปรตาม y คือ ยอดจำหน่ายสินค้าของสัปดาห์หนึ่ง ๆ เป็นตัวแปรเชิงปริมาณ

ปัจจัยที่ทำการศึกษามี 2 ปัจจัยคือ 1) เครื่องหมายการค้าของสินค้า และ 2) ตำแหน่งของชั้นวางสินค้า ทั้ง 2 ปัจจัยนี้เป็นตัวแปรเชิงคุณภาพ ซึ่งโดยทั่วไปอาจเป็นตัวแปรเชิงปริมาณหรือตัวแปรเชิงคุณภาพก็ได้

ทรีทเมนต์คอมบิเนชันคิดจากการคูณจำนวนระดับของปัจจัยเครื่องหมายการค้า กับจำนวนระดับของปัจจัยตำแหน่งชั้นวางสินค้า ได้เท่ากับ 6 ทรีทเมนต์คอมบิเนชันคือ

1) ยี่ห้อ1, ชั้นบนสุด 2) ยี่ห้อ1, ชั้นกลาง 3) ยี่ห้อ1, ชั้นพื้นล่าง

4) ยี่ห้อ2, ชั้นบนสุด 5) ยี่ห้อ2, ชั้นกลาง 6) ยี่ห้อ2, ชั้นพื้นล่าง

การออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์คือ การจัดหน่วยทดลองให้ได้รับทรีทเมนต์ ใด ๆ อย่างสุ่ม โดยการจับฉลากหน่วยทดลอง คือ สัปดาห์หนึ่งให้ได้รับทรีทเมนต์ใดทรีทเมนต์หนึ่ง สรุปได้ ทรีทเมนต์ละ 3 สัปดาห์ดังภาพ

การเก็บข้อมูลยอดจำหน่ายสินค้าของสัปดาห์หนึ่ง ๆ สรุปลงในตารางข้อมูลได้ดังนี้

ตาราง รูปแบบข้อมูลยอดจำหน่ายสินค้าของสัปดาห์หนึ่งของการทดลอง 2 $\times$ 3 แฟกทอเรียล ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

ตำแหน่งชั้นวางสินค้า	เครื่องหมายการค้า	
	ยี่ห้อ 1	ยี่ห้อ 2
ชั้นบนสุด	Y, ชั้นบนสุด, สัปดาห์ 1 Y, ชั้นบนสุด, สัปดาห์ 2 Y, ชั้นบนสุด, สัปดาห์ 3	Y, ชั้นบนสุด, สัปดาห์ 1 Y, ชั้นบนสุด, สัปดาห์ 2 Y, ชั้นบนสุด, สัปดาห์ 3
ชั้นกลาง	Y, ชั้นกลาง, สัปดาห์ 1 Y, ชั้นกลาง, สัปดาห์ 2 Y, ชั้นกลาง, สัปดาห์ 3	Y, ชั้นกลาง, สัปดาห์ 1 Y, ชั้นกลาง, สัปดาห์ 2 Y, ชั้นกลาง, สัปดาห์ 3
ชั้นพื้นล่าง	Y, ชั้นพื้นล่าง, สัปดาห์ 1 Y, ชั้นพื้นล่าง, สัปดาห์ 2 Y, ชั้นพื้นล่าง, สัปดาห์ 3	Y, ชั้นพื้นล่าง, สัปดาห์ 1 Y, ชั้นพื้นล่าง, สัปดาห์ 2 Y, ชั้นพื้นล่าง, สัปดาห์ 3

สามารถเขียนเป็นรูปแบบข้อมูลทั่วไปของการทดลองแฟกทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ได้ดังตาราง

		ปัจจัย B			
		1	2	…	b
ปัจจัยA	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots y_{2bn}$
	. . .				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots y_{abn}$

3.1 ตัวแบบสถิติสำหรับ 2 ปัจจัย ที่เป็นปัจจัยแบบกำหนดทั้งคู่

ตัวอย่างการทดลองแฟคทอเรียลสำหรับ 2 ปัจจัย คือ A และ B ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ ตัวแบบทางสถิติคือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 1, 2, \dots, n$

y_{ijk} คือ ค่าสังเกตเมื่อปัจจัย A อยู่ที่ระดับ i, ปัจจัย B อยู่ที่ระดับ j และจำนวนซ้ำที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

τ_i คือ อิทธิพลของปัจจัย A ที่ระดับ i

β_j คือ อิทธิพลของปัจจัย B ที่ระดับ j

$(\tau\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่าง τ_i และ β_j

ε_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติ สำหรับ 2 ปัจจัยที่เป็นปัจจัยแบบกำหนดคือ

$$\sum_{i}^{a} \hat{\tau}_i = 0 \quad , \quad \sum_{j}^{b} \hat{\beta}_j = 0$$

$$\sum_{i}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad , \quad \sum_{j}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad , \quad j = 1, 2, \dots, b$$

3.2 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

การวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อทดสอบสมมติฐานทางสถิติในการทดลองที่มีปัจจัยที่เราสนใจศึกษา 2 ตัว คือ A และ B เราต้องการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ 3 อย่าง คือ

1) การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลักของปัจจัย A คือ

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0$

$H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2) การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลักของปัจจัย B คือ

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_b = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

3) การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วมของ 2 ปัจจัย คือ

$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ ทุก i, j

$H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

เราใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนในการทดสอบสมมติฐานทางสถิติทั้ง 3 ข้างต้น โดยอาศัยตรรกยะของการวิเคราะห์ความแปรปรวน และใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการคำนวณความเบี่ยงเบนของข้อมูลแต่ละตัวจากค่าเฉลี่ยทั้งหมด การคำนวณหาผลบวกกำลังสองของความแตกต่างทั้งหมดของข้อมูลแต่ละตัวที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยทั้งหมดสามารถแสดงเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 &= \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} [\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) \\
&\quad + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\
&= bn\sum_{i}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an\sum_{j}^{b}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
&\quad + n\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned}
$$

แสดงให้ง่ายขึ้นได้ คือ

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

จำนวนชั้นอิสระของแต่ละเทอมคือ

อิทธิพล	จำนวนชั้นอิสระ
A	a - 1
B	b - 1
AB	(a - 1)(b - 1)
Error	ab(n - 1)
Total	abn - 1

3.2.1 ค่าคาดหมายกำลังสองเฉลี่ย

ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย (Expected Mean Square) ของแต่ละเทอมคือ

$$E(MS_A) = E\left(\frac{SS_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_i \tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an\sum_j \beta_j^2}{b-1}$$

$$E(MS_{AB}) = E\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_i \sum_j (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$$

$$E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2$$

3.2.2 การคำนวณผลบวกกำลังสอง

การคำนวณผลบวกกำลังสองของแต่ละเทอมคือ

ผลบวกกำลังสองของ Total คือ

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

ผลบวกกำลังสองของอิทธิพลหลักคือ

$$SS_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

และ

$$SS_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

ผลบวกกำลังสองของอิทธิพลร่วมคือ

$$SS_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - SS_A - SS_B - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนคือ

$$SS_E = SS_T - SS_{AB} - SS_A - SS_B$$

ตาราง 6.3 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแฟคทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

Source of Variation	Degree of Freedom	Sum of Square	F_0
A	(a - 1)	$bn\sum_{i}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B	(b - 1)	$an\sum_{j}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
AB	(a - 1)(b - 1)	$n\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	ab(n - 1)	ได้จากการลบ	
Total	abn - 1	$\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{i...})^2$	

3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบสถิติ

จากตัวแบบสถิติของการทดลองที่มี 2 ปัจจัย คือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

ใช้วิธีการประมาณแบบกำลังสองน้อยที่สุด จากตัวแบบสถิติมีจำนวนพารามิเตอร์เท่ากับ 1 + a + b + ab ตัว ทำให้มีสมการปกติจำนวนเท่ากับ 1 + a + b + ab สมการด้วย

สมการปกติคือ

$$abn\,\hat{\mu} + bn\sum\hat{\tau}_i + an\sum\hat{\beta}_j + n\sum\sum(\tau\hat{\beta})_{ij} = y_{...}$$

$$bn\,\hat{\mu} + bn\sum\hat{\tau}_i + n\sum\hat{\beta}_j + n\sum(\tau\hat{\beta})_{ij} = y_{i..}$$

$$an\,\hat{\mu} + n\sum\hat{\tau}_i + an\sum\hat{\beta}_j + n\sum(\tau\hat{\beta})_{ij} = y_{.j.}$$

$$n\,\hat{\mu} + n\,\hat{\tau}_i + n\,\hat{\beta}_j + n(\tau\hat{\beta})_{ij} = y_{ij.}$$

ทำให้ได้ค่าประมาณของพารามิเตอร์ ดังนี้

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

$$(\tau\hat{\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \;;\; j = 1, 2, \ldots, b$$

คำนวณค่าประมาณของค่าสังเกตแต่ละตัวได้ดังนี้

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + (\tau\hat{\beta})_{ij}$$

$$= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})$$

$$= \bar{y}_{ij.}$$

แต่ถ้าไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างปัจจัย 2 ปัจจัย จะได้ค่าประมาณของค่าสังเกตแต่ละตัวดังนี้

จากตัวแบบสถิติ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

คำนวณค่าประมาณของค่าสังเกตแต่ละตัวได้คือ

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j$$
$$= \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})$$
$$= \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

3.4 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error)

การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณค่าเฉลี่ยต่าง ๆ ในการทดลองแฟกทอเรียลทำได้ดังนี้

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของปัจจัย A

$$S_{\bar{y}_{i..}} = \sqrt{\frac{MS_E}{nb}}$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของปัจจัย B

$$S_{\bar{y}_{.j.}} = \sqrt{\frac{MS_E}{na}}$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์

$$S_{\bar{y}_{ij.}} = \sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

4. ตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัยที่ไม่มีอิทธิพลร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 2 เพียงใจ วงษ์เชษฐา (2529) สนใจศึกษาอิทธิพลของการจัดการน้ำที่มีผลต่อผลผลิตของข้าวพันธุ์ กข 23 ผู้วิจัยสนใจศึกษาอิทธิพลของปัจจัย 2 ปัจจัยคือ ระดับน้ำและระยะเวลาในการให้น้ำ ระดับน้ำที่เลือกใช้ในการทดลองมี 3 ระดับ คือ 5 ซม. 10 ซม. และ 15 ซม. ส่วนระยะเวลาในการให้น้ำมี 2 ระดับ คือ ให้ตลอดฤดูปลูก และอีกวิธีหนึ่งรักษาน้ำในระดับผิวดินจนกระทั่งต้นข้าวมีการแตกกอสูงสุดแล้วให้น้ำและรักษาไว้ในระดับต่าง ๆ จนกระทั่งเก็บเกี่ยว คิดเป็นทรีทเมนต์คอมบิเนชันเท่ากับ $2 \times 3 = 6$ ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน ทำการทดลอง 4 ซ้ำ หน่วยทดลองคือแปลงขนาด 5×7 ตารางเมตร มีหน่วยทดลองทั้งหมด 24 แปลงย่อย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ โดยสุ่มให้แต่ละแปลงได้รับทรีทเมนต์ใด ๆ เป็นไปโดยสุ่ม แสดงเป็นแผนภาพการออกแบบการทดลองได้ดังนี้

5	4	3	1
2	6	4	6
3	1	2	5
5	3	1	4
6	2	6	4
1	2	3	5

7 เมตร

5 เมตร

ภาพ 6.3 แผนภาพการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ แสดงการสุ่มทรีทเมนต์ 1 ถึง 6 ให้กับพื้นที่แต่ละแปลงขนาด 5 × 7 ตารางเมตร

เก็บข้อมูลเมื่อต้นข้าวมีอายุครบ 130 วัน ทำการชั่งผลผลิตข้าววัดเป็นหน่วย กก.ต่อไร่ ได้ข้อมูลดังตาราง 6.3

ตาราง 6.3 ข้อมูลผลผลิตข้าวพันธุ์ กข 23 (กก./ไร่) เมื่อมีการจัดการน้ำต่างกัน

ระยะเวลาการให้น้ำ	**ระดับน้ำ**			
	5 ซม.	10 ซม.	15 ซม.	$y_{i..}$
ตลอดฤดูปลูก	896.81	797.61	789.34	
	618.67	734.14	782.94	
	816.28	784.01	753.61	
	684.81	754.68	698.68	
$y_{1j.}$	3016.57	3070.44	3024.57	9111.58
ระดับน้ำผิวดิน และหลังแตกกอสูงสุด	901.41	775.21	773.34	
	814.94	738.41	738.14	
	866.14	871.48	762.94	
	769.08	901.34	913.08	
$y_{2j.}$	3351.57	3286.44	3187.50	9825.51
$y_{.j.}$	6368.14	6356.88	6212.07	$y_{...}$ = 18937.09

ตาราง 6.4 ค่าเฉลี่ยผลผลิตข้าวพันธ์ กข. 23 (กก./ไร่) เมื่อมีการจัดการน้ำต่างกัน

ระยะเวลาการให้น้ำ	**ระดับน้ำ**			
	5 ซม.	10 ซม.	15 ซม.	$\bar{y}_{i..}$
ตลอดฤดูปลูก	754.1425	767.6100	756.1425	759.2983
ระดับน้ำผิวดินและหลังแตกกอสูงสุด	837.8925	821.6100	796.875	818.7925
$\bar{y}_{.j.}$	796.0175	794.6100	776.5088	$\bar{y}_{...}$ = 789.0454

วิธีทำ

กำหนดให้ A แทนระยะเวลาการให้น้ำ มี 2 ระดับ a = 2

B แทนระดับน้ำ มี 3 ระดับ b = 3

1. สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบเกี่ยวกับอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วม

สมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลักที่ต้องการทดสอบ คือ

$H_0 : \tau_i = 0$ คู่กับ $H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า ; i = 1, 2

$H_0 : \beta_j = 0$ คู่กับ $H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า ; j = 1, 2, 3

สมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วมที่ต้องการทดสอบ คือ

$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ คู่กับ $H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2. ทดสอบสมมติฐานโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวน

CT คือ corrected term ในสูตรการคำนวณผลบวกกำลังสอง

n คือ จำนวนซ้ำมี 4 ซ้ำ

$$CT = \frac{y_{...}^2}{nab}$$

$$= \frac{18937.09^2}{(4)(2)(3)}$$

$$= 14942224$$

$$SS_T = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{n} y_{ijk}^2 - CT$$

$$= 15068928.54 - 14942224$$

$$= 126704.5$$

$$SS_A = \sum_{i}^{a} \frac{y_{i..}^2}{nb} - CT$$

$$= \frac{9111.58^2 + 9825.51^2}{12} - CT$$

$$= 14963461.4 - 14942224$$

$$= 21237.3352$$

$$SS_B = \sum_{j}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{na} - CT$$

$$= \frac{6368.14^2 + 6356.88^2 + 6212.07^2}{8} - CT$$

$$= 14944118 - 14942224$$

$$= 1893.94$$

$$SS_{AB} = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - SS_A - SS_B - CT$$

$$= \frac{301657^2 + 3070.44^2 + ... + 3187.50^2}{4} - SS_A - SS_B - CT$$

$$= 14967296 - 21237.3352 - 1893.94 - 14942224$$

$$= 1941.0629$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

$$= 126704.5 - 21237.3352 - 1893.94 - 1941.0629$$

$$= 101632.132$$

ตาราง 6.5 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับผลผลิตข้าวพันธุ์ กข.23 ที่มีการรักษาระดับน้ำและระยะเวลาในการรักษาระดับน้ำที่แตกต่างกัน ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

แหล่งของความแปรปรวน	df	Sum of Square	Mean Square	F_0
ระยะเวลาการให้น้ำ (A)	1	21237.3352	21237.3352	3.7613
ระดับน้ำ (B)	2	1893.9400	946.9702	0.1677
AB	2	1941.0629	970.5315	0.1799
Error	18	101632.1320	5646.23	
Total	23	126704.5000		

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน

1) สำหรับการทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลร่วม

เนื่องจากค่าสถิติที่คำนวณได้ $F_0 = 0.1799$ น้อยกว่าค่าวิกฤต $F_{.05;\ 2,\ 18}$ ที่เปิดได้จากตารางเท่ากับ 3.55 จึงสรุปได้ว่าไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปว่ามีอิทธิพลร่วมระหว่างระยะเวลาการให้น้ำและระดับน้ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05

2) สำหรับการทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลหลัก

เนื่องจากการทดสอบอิทธิพลหลักของระยะเวลาการให้น้ำและระดับน้ำ ได้ค่าสถิติที่คำนวณได้ $F_0 = 3.7613$ และ $F_0 = 0.1677$ ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต $F_{.05;\ 1,\ 18} = 4.41$ $F_{.05;\ 2,\ 18} = 3.55$ ตามลำดับ พบว่าน้อยกว่าค่าวิกฤติทั้ง 2 ค่า จึงสรุปได้ว่าไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปว่ามีอิทธิพลของระยะเวลาการให้น้ำและไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปว่ามีอิทธิพลของระดับน้ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3) การอภิปรายผลของการทดลองนี้ควรแสดงการพล็อตกราฟของค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตที่ทุก ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน เพื่อแสดงอิทธิพลร่วมหรือปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับน้ำและระยะเวลาการให้น้ำ โดยการคำนวณค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตของทุกทรีทเมนต์คอมบิเนชันดังนี้

สำหรับปัจจัยระยะเวลาการให้น้ำ มี 2 ระดับ คือ

- ให้น้ำตลอดฤดูปลูก สำหรับทุกระดับของระดับน้ำคือ

ที่ระดับ 5 ซม. , $\bar{y}_{11.} = 3016.57/4 = 754.14$

ที่ระดับ 10 ซม. , $\bar{y}_{12.} = 3070.44/4 = 767.61$

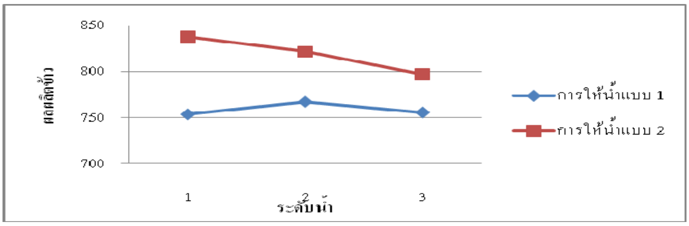
ที่ระดับ 15 ซม. , $\bar{y}_{13.} = 3024.57/4 = 756.14$

- ให้ระดับผิวดินและหลังแตกกอสูงสุด สำหรับทุกระดับของระดับน้ำคือ

ที่ระดับ 5 ซม. , $\bar{y}_{21.} = 3351.57/4 = 837.89$

ที่ระดับ 10 ซม. , $\bar{y}_{22.} = 3286.44/4 = 821.61$

ที่ระดับ 15 ซม. , $\bar{y}_{23.} = 3187.50/4 = 796.88$



ภาพ 6.4 อิทธิพลร่วมของระดับน้ำกับระยะเวลาการให้น้ำ

จากภาพจะเห็นว่าไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่างระดับน้ำและระยะเวลาการให้น้ำ คือเส้น กราฟค่อนข้างขนานกัน และอธิบายได้ว่าการจัดการน้ำระดับน้ำผิวดินและหลังแตกกอสูงสุดมีผลให้ผลผลิตข้าว กข.23 สูงกว่าการจัดการน้ำตลอดฤดูปลูกทุกระดับน้ำที่สนใจศึกษา อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4) การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณค่าเฉลี่ยต่าง ๆ ในการทดลองแฟกทอเรียล เช่นตัวอย่าง

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของปัจจัยระยะเวลาการให้น้ำ ระดับ i

$$S_{\bar{y}_{i..}} = \sqrt{\frac{MSE}{nb}}$$

$$= \sqrt{\frac{5646.23}{(4)(3)}}$$

$$= 21.69$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของปัจจัยระดับน้ำ ระดับ j

$$S_{\bar{y}_{.j.}} = \sqrt{\frac{MSE}{na}}$$

$$= \sqrt{\frac{5646.23}{(4)(2)}}$$

$$= 26.57$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คอมบิเนชัน ij

$$S_{\bar{y}_{ij.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{5646.23}{4}}$$

$$= 37.57$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คอมบิเนชันคู่ใด ๆ

$$S_{\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{k\ell.}} = \sqrt{\frac{2MSE}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(5646.23)}{8}}$$

$$= 37.57$$

5. การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบสถิติ (Model Adequacy Checking)

5.1 คำนวณค่า R^2 สำหรับตัวแบบสถิตินี้คือ

$$R^2 = \frac{SS_{\text{ตัวแบบสถิติ}}}{SS_T}$$

$$= \frac{SS_A + SS_B + SS_{AB}}{SS_T}$$

$$= \frac{21237.3352 + 1893.9400 + 1941.0629}{126704.2}$$

$$= 0.1979$$

หมายความว่าตัวแบบสถิตินี้สามารถอธิบายความแปรปรวนในข้อมูลได้ประมาณ 19.79% แสดงว่าตัวแบบสถิตินี้มีความเหมาะสมกับข้อมูลน้อยมาก

5.2 การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน (Residual Analysis)

สำหรับการศึกษาอิทธิพลของการจัดการน้ำที่มีผลต่อผลผลิตข้าวพันธ์ กข.23 ซึ่งผู้วิจัยสนใจศึกษา 2 ปัจจัย และผลจากการทดสอบอิทธิพลร่วมพบว่าไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่าง 2 ปัจจัยนั้น จึงเขียนตัวแบบสถิติของการทดลองนี้ซึ่งไม่มีอิทธิพลร่วม คือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

ก่อนที่จะสรุปผลจากการวิเคราะห์ความแปรปรวน ควรตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบสถิตินี้ก่อน เครื่องมือที่ใช้ในการตรวจสอบก็คือการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

ขั้นตอนแรกของการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนคือ การคำนวณค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนของตัวแบบการทดลองแฟคทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย และ 2 ปัจจัยนั้นไม่มีอิทธิพลร่วมกันคือ

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

เมื่อ $\hat{y}_{ijk} = \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$

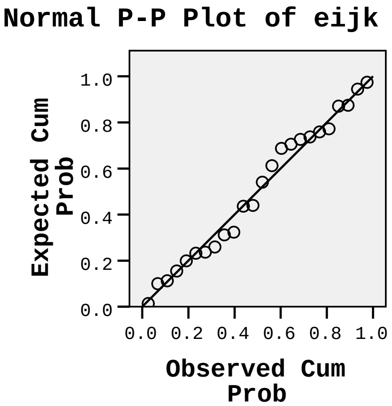
คำนวณหาความคลาดเคลื่อน (e_{ij}) ของตัวอย่างที่ 2 ได้ดังตาราง 6.6

ตาราง 6.6 ความคลาดเคลื่อน (e_{ijk}) ของค่าสังเกตทุกตัวในการศึกษาอิทธิพลของการจัดการน้ำที่มีผลต่อผลผลิตข้าวพันธ์ กข. 23

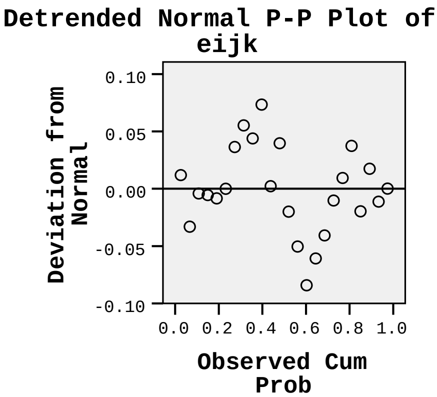
ระยะเวลาการให้น้ำ	**ระดับน้ำ**		
	5 ซม.	**10 ซม.**	**15 ซม.**
ตลอดฤดูปลูก	130.54	32.75	42.58
	-147.60	-30.73	36.18
	50.01	19.15	6.85
	-81.46	-10.18	-48.08
ระดับน้ำผิวดินและหลังแตกกอสูงสุด	75.65	-49.15	-32.92
	-10.82	-85.95	-68.12
	40.38	47.12	-43.32
	-56.68	76.98	106.82

5.2.1 ตรวจสอบความเป็นปกติของความคลาดเคลื่อน

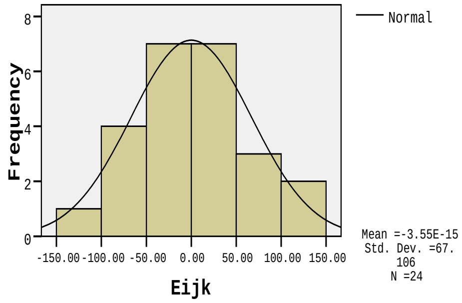
ตรวจสอบว่าความคลาดเคลื่อน มีการแจกแจงแบบปกติ โดยการใช้โปรแกรม SPSS for window ช่วยในการพล็อตกราฟ P – P Plot และฮีสโตแกรม ดังภาพ



ภาพ 6.5 (1) Normal P–P Plot ของความคลาดเคลื่อน



ภาพ 6.5 (2) Detrended P–P Plot ของความคลาดเคลื่อน

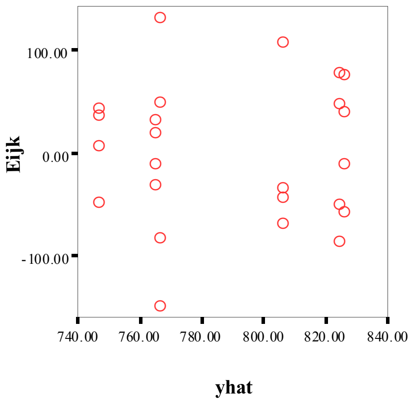


ภาพ 6.6 ฮีสโตแกรมของความคลาดเคลื่อน

จากกราฟไม่ได้แสดงสิ่งผิดปกติ ถึงแม้ว่าจะมีความคลาดเคลื่อนที่มีค่ามากที่สุดเป็นค่าติดลบ (-147.60 ที่ให้น้ำตลอดฤดูปลูกที่ระดับน้ำ 5 ซม.) แต่ก็ไม่ใช่ outlier เพราะ $\frac{-147.60}{\sqrt{5646.23}} = -1.96$ ยังอยู่ในช่วง ± 3 และเมื่อพล็อตฮีสโตแกรม ข้อมูลก็ใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ

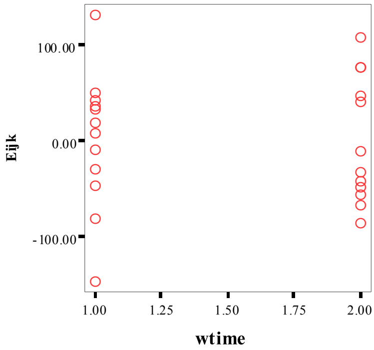
5.2.2 ตรวจสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในทุก ทรีทเมนต์

ตรวจสอบว่าความคลาดเคลื่อน (e_{ijk}) มีความแปรปรวนเท่ากับค่าคงที่ σ^2 โดยการพล็อตกราฟความคลาดเคลื่อน (e_{ijk}) กับค่าประมาณของค่าสังเกตแต่ละตัว ($\hat{y}_{ijk}$)

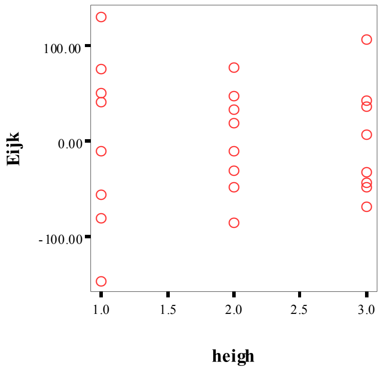


ภาพ 6.7 กราฟความคลาดเคลื่อน (e_{ijk}) กับค่าประมาณของค่าสังเกตแต่ละตัว ($\hat{y}_{ijk}$)

จากกราฟมีแนวโน้มว่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่เท่ากันบางทรีทเมนต์ซึ่งเมื่อพิจารณาจากกราฟที่พล็อตระหว่าง e_{ijk} กับระยะเวลาการให้น้ำ และกราฟระหว่าง e_{ijk} กับระดับน้ำ แสดงให้เห็นว่าความคลาดเคลื่อนมากเมื่อให้น้ำตลอดฤดูปลูกและที่ระดับน้ำ 5 ซม.



ภาพ 6.8 กราฟของความคลาดเคลื่อนกับระยะเวลาการให้น้ำ



ภาพ 6.9 กราฟของความคลาดเคลื่อนกับระดับน้ำ

6. ตัวอย่างการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย ที่มีอิทธิพลร่วมของ 2 ปัจจัยนั้น

ตัวอย่างที่ 3 มนัส กัมพุกุล (2529) การศึกษาเรื่องจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวและระยะปลูกที่มีผลต่อผลผลิตของน้ำยางต้นพญาไร้ใบ มีวัตถุประสงค์เพื่อหาวิธีการที่ให้ผลผลิตน้ำยางสูงสุด ผู้วิจัยสนใจระยะปลูก 4 ระยะ คือ 1×1, 1.5×1.5, 2×2 และ 2.5×2.5 เมตร และจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว (ตัด) 4 ระดับ คือ 1 ครั้ง/ปี 2ครั้ง/ปี 3 ครั้ง/ปี และ 6 ครั้ง/ปี ทำการทดลองในแปลงปลูกทดลองปลูกต้นพญาไร้ใบในโครงการวิจัยพืชเพื่อพลังงานทดแทนและอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน เก็บข้อมูลเป็นผลผลิตต่อไร่ได้ข้อมูลดังตาราง

ตาราง 6.7 แสดงผลผลิตของต้นพญาไร้ใบ (กก./50 ม^2) ในระยะปลูก 4 ระยะ และจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว 4 ระดับ

จำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว	**ระยะปลูก (เมตร)**				$\mathbf{Y_{i..}}$
(ครั้ง/ปี)	**1 × 1**	**1.5 × 1.5**	**2 × 2**	**2.5 × 2.5**	
1	257	191.5	159.5	128.5	
	249.5	191	156.5	120	
	250.5	198	456	130	
	246	196	457	134	
$y_{1j.}$	1003	776.5	629	512.5	2921
	540	364	351	286	
2	524	362	322	249	
	514	369	345	230	
	422	339	357	220	
$y_{2j.}$	2000	1343	1375	985	5794
	523	389	447	395	
3	554	391	415	407	
	551	385	413	412	
	540	350	413	392	
$y_{3j.}$	2168	1515	1688	1606	6977
	759	477.5	586.5	463	
4	703	529	551	493	
	862	459.5	593.5	450	
	742	539.5	597	421	
$y_{4j.}$	2966	2005.5	2328	1827	9126.5
$y_{.j.}$	8137	5731	6020	4930.5	$y_{...}$ = 24818.5

กำหนดให้ A แทน จำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว มี 4 ระดับ a = 4

B แทน ระยะปลูก มี 4 ระดับ b = 4

วิธีทำ

1) สมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วม

สมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลักที่ต้องการทดสอบคือ

$H_0 : \tau_i = 0$ คู่กับ $H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า ; $i = 1, 2, 3, 4$

$H_0 : \beta_j = 0$ คู่กับ $H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า ; $j = 1, 2, 3, 4$

สมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วมที่ต้องการทดสอบ คือ

$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ คู่กับ $H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2) ทดสอบสมมติฐานโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวน

$$CT = \frac{y_{....}^2}{nab} = \frac{24818.5^2}{(4)(4)(4)} = 9{,}624{,}342.85$$

$$SS_{Total} = (257)^2 + (249.5)^2 + (250.5)^2 + ... + (421)^2 - 9{,}624{,}342.85$$

$$= 1{,}697{,}981.9$$

$$SS_A = \frac{(2{,}921)^2 + (5{,}794)^2 + ... + (6{,}977)^2 + (9{,}126.5)^2}{16} - 9{,}624{,}342.85$$

$$= 1{,}225{,}295.17$$

$$SS_B = \frac{(8{,}137)^2 + (5{,}731)^2 + ... + (6{,}020)^2 + (4{,}930.5)^2}{16} - 9{,}624{,}342.85$$

$$= 350{,}992.17$$

$$SS_{AB} = \frac{(1{,}003)^2 + (776.5)^2 + ... + (1{,}827)^2}{4} - SS_A - SS_B - CT$$

$$= 1{,}671{,}955.34 - 1{,}255{,}295.17 - 350{,}992.71 - 9{,}624{,}342.85$$

$$= 65{,}668$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

$$= 1{,}697{,}981.9 - 1{,}255{,}295.17 - 350{,}992.17 - 65{,}668$$

$$= 26{,}026.56$$

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 6.8 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับผลผลิตของต้นหญาไร้ใบที่มีระยะปลูกและจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวที่แตกต่างกันออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

แหล่งของความแปรปรวน	Sum of Square	Degree of Freedom	Mean Square	F_0
ทรีทเมนต์	1,671,955.34	15		
A	1,255,295.17	3	418,431.72	771.70
B	350,992.17	3	116,997.39	215.77
AB	65,668	9	7,296.44	13.46
Error	26,026.56	48	542.22	
Total	1,697,981.9	63		

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน

1) สำหรับการทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลร่วม

เนื่องจากค่าสถิติที่คำนวณได้ $F_0 = 13.46$ มากกว่าค่าวิกฤติ $F_{.05;\,9,48}$ ที่เปิดจากตารางเท่ากับ 1.92 จึงสรุปว่า มีอิทธิพลร่วมระหว่างจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวและระยะปลูกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.5

2) สำหรับการทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลหลัก

เนื่องจากการทดสอบอิทธิพลหลักของจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว และระยะปลูกได้ค่าสถิติที่คำนวณได้ $F_0 = 771.70$ และ $F_0 = 215.77$ ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติ $F_{.05\,;\,3,\,48} = 2.84$ พบว่ามากกว่าค่าวิกฤติทั้ง 2 ค่า จึงสรุปว่า มีอิทธิพลของจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05 และมีอิทธิพลของระยะปลูกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05

3) อภิปรายผลด้วยการแสดงการพล็อตกราฟของค่าเฉลี่ยของผลผลิตของต้นพญาไร้ใบที่ทุกทรีทเมนต์คอมบิเนชั่น เพื่อแสดงอิทธิพลร่วมหรือปฏิสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวกับระยะปลูก โดยการคำนวณค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตของทุกทรีทเมนต์คอมบิเนชันดังนี้

การคำนวณค่าเฉลี่ยของผลผลิตของต้นพญาไร้ใบที่ทุกทรีทเมนต์คอมบิเนชันจำแนกตามจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวสำหรับทุกระยะปลูกคือ

1 ครั้ง / ปี : ระยะปลูก 1 × 1 เมตร , $\bar{y}_{11.} = 1003/4 = 250.75$

ระยะปลูก 1.5 × 1.5 เมตร , $\bar{y}_{12.} = 776.5/4 = 194.125$

ระยะปลูก 2 × 2 เมตร , $\bar{y}_{13.} = 629/4 = 157.25$

ระยะปลูก 2.5 × 2.5 เมตร , $\bar{y}_{14.} = 512.5/4 = 128.125$

2 ครั้ง / ปี : ระยะปลูก 1×1 เมตร , $\bar{y}_{21.} = 2000/4 = 500$

ระยะปลูก 1.5×1.5 เมตร , $\bar{y}_{22.} = 1434/4 = 358.5$

ระยะปลูก 2×2 เมตร , $\bar{y}_{23.} = 1375/4 = 343.75$

ระยะปลูก 2.5×2.5 เมตร , $\bar{y}_{24.} = 985/4 = 246.25$

3 ครั้ง / ปี : ระยะปลูก 1×1 เมตร , $\bar{y}_{31.} = 2168/4 = 542$

ระยะปลูก 1.5×1.5 เมตร , $\bar{y}_{32.} = 1515/4 = 378.75$

ระยะปลูก 2×2 เมตร , $\bar{y}_{33.} = 1688/4 = 422$

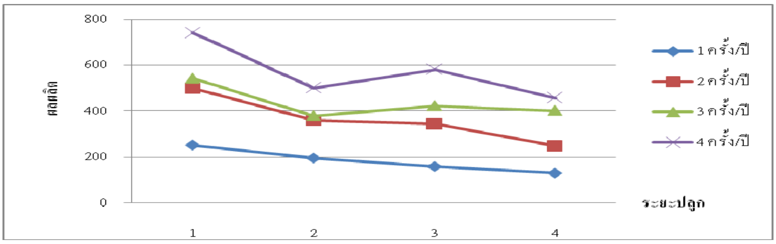
ระยะปลูก 2.5×2.5 เมตร , $\bar{y}_{34.} = 1606/4 = 401.5$

4 ครั้ง / ปี : ระยะปลูก 1×1 เมตร , $\bar{y}_{41.} = 2066/4 = 741.5$

ระยะปลูก 1.5×1.5 เมตร , $\bar{y}_{42.} = 2005.5/4 = 501.38$

ระยะปลูก 2×2 เมตร , $\bar{y}_{43.} = 2328/4 = 582$

ระยะปลูก 2.5×2.5 เมตร , $\bar{y}_{44.} = 1827/4 = 456.75$



ภาพ 6.10 แสดงอิทธิพลร่วมของจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวกับระยะปลูก

4) การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์โดยใช้วิธีดันแคน

สำหรับการทดลองที่มีอิทธิพลร่วม AB อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติทำให้การเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของปัจจัยหนึ่ง เช่น ปัจจัย A อาจถูกรบกวนจากอิทธิพลร่วม AB สำหรับสถานการณ์เช่นนี้เราสามารถดำเนินการเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของปัจจัย A โดยกำหนดให้ปัจจัย B อยู่ที่ระดับใดระดับหนึ่ง ตัวอย่างเช่น สมมติว่าเราสนใจเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่เป็นจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว 4 แบบ เนื่องจากอิทธิพลร่วมมีนัยสำคัญ เราจะทำการเปรียบเทียบที่ระยะปลูก 1×1 เมตร เราทราบค่าประมาณที่ดีที่สุดของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการทดลองคือ MSE และจากข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่า

$$S_{\bar{y}_{i1.}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{542.22}{4}}$$
$$= 11.6428$$

จากตัวอย่างที่ 3 ผลการวิเคราะห์สรุปว่ามีอิทธิพลร่วมของปัจจัย และในการวิจัยอยากทราบว่าจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยวแบบต่าง ๆ ให้ผลผลิตแตกต่างกันหรือไม่ที่ระยะปลูก 1 × 1 เมตร เราจึงคำนวณค่าเฉลี่ยของผลผลิตต้นพญาไร้ใบ สำหรับทรีทเมนต์ที่เป็นจำนวนครั้งในการเก็บเกี่ยว 4 แบบ เฉพาะที่ระยะปลูก 1 × 1 เมตรเท่านั้นคือ

เก็บเกี่ยว 1 ครั้งต่อปี , $\bar{y}_{11.} = 250.75$

เก็บเกี่ยว 2 ครั้งต่อปี , $\bar{y}_{21.} = 500$

เก็บเกี่ยว 3 ครั้งต่อปี , $\bar{y}_{31.} = 542$

เก็บเกี่ยว 4 ครั้งต่อปี , $\bar{y}_{41.} = 741.5$

ขั้นตอนการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์โดยใช้วิธีดันแคน

- เรียงลำดับค่าเฉลี่ยของผลผลิต

$\bar{y}_{11.}$	$\bar{y}_{21.}$	$\bar{y}_{31.}$	$\bar{y}_{41.}$
250.75	500	542	741.5

- เปิดตารางเพื่อหาช่วงนัยสำคัญของค่าเฉลี่ยที่อยู่เรียงลำดับกันเป็นเซ็ตสำหรับเซ็ตที่มีจำนวนค่าเฉลี่ย 2, 3, 4 ค่า

$$r_{.05(2,48)} = 2.86$$
$$r_{.05(3,48)} = 3.01$$
$$r_{.05(4,48)} = 3.10$$

- คำนวณช่วงนัยสำคัญที่น้อยที่สุด (Least significant ranges) คือ

$$R_2 = r_{.05(2,48)} S_{\bar{y}_{i1.}} = 2.86\,(11.643) = 33.298$$
$$R_3 = r_{.05(3,48)} S_{\bar{y}_{i2.}} = 3.01\,(11.643) = 33.045$$
$$R_4 = r_{.05(4,48)} S_{\bar{y}_{i3.}} = 3.10\,(11.643) = 36.093$$

- การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทีละคู่คือ

ทรีทเมนต์ 4 คู่กับ 1 : 741.5 – 250.75 = 490.75 > R_4

ทรีทเมนต์ 4 คู่กับ 2 : 741.5 – 500 = 241.5 > R_3

ทรีทเมนต์ 4 คู่กับ 3 : 741.5 – 542 = 119.5 > R_2

ทรีทเมนต์ 3 คู่กับ 1 : 542 – 250.75 = 291.25 > R_3

ทรีทเมนต์ 3 คู่กับ 2 : 542 – 500 = 42 > R_3

ทรีทเมนต์ 2 คู่กับ 1 : 500 – 250.75 = 249.25 > R_2

ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์แต่ละคู่สรุปได้ว่า ที่ระยะปลูก 1 $\times$ 1 เมตร ผลผลิตของต้นพญาไร้ใบที่เก็บเกี่ยวแบบต่าง ๆ ทั้ง 4 แบบ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

7. การทดลองแฟคทอเรียลที่มี 2 ปัจจัยเป็นปัจจัยกำหนด และปัจจัยสุ่ม

7.1 การทดลองที่มี 2 ปัจจัย ตัวแบบอิทธิพลแบบผสม

ปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบกำหนด ถ้าเราต้องการสรุปอ้างอิงไปสู่ระดับของปัจจัยที่สนใจศึกษาเท่านั้น และอีกปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบสุ่มถ้าระดับของปัจจัยที่ศึกษาเป็นตัวอย่างจากจำนวนระดับทั้งหมด และเราต้องการสรุปอ้างอิงไปสู่จำนวนระดับทั้งหมดของปัจจัยนั้น

ตัวแบบอิทธิพลแบบผสมคือ มีบางปัจจัยมีอิทธิพลแบบกำหนดและมีปัจจัยอื่น ๆ มีอิทธิพลแบบสุ่ม

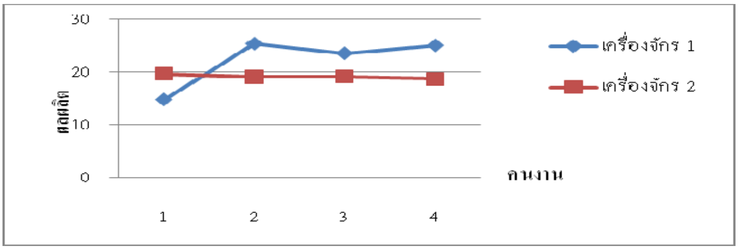
ความแปรปรวนของค่าสังเกตแต่ละค่าประกอบด้วย ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (σ^2) และความแปรปรวนของอิทธิพลแบบสุ่ม มักจะเรียกว่าองค์ประกอบของความแปรปรวน

ตัวอย่างที่4 การทดลองที่มีปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบกำหนดและอีกปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบสุ่ม ซึ่งเป็นตัวอย่างของตัวแบบอิทธิพลผสม

บริษัทผู้ผลิตสินค้าอยากทราบว่าปัจจัยอะไรที่มีผลต่อผลผลิตในบริษัทมีเครื่องจักร 2 ชนิด ($a = 2$) ต้องการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของผลผลิตที่ได้จากเครื่องจักร 2 ชนิดเท่ากันหรือไม่ ในโรงงานมีคนงานจำนวนมากที่ทำงานกับเครื่องจักรสุ่มคนงานมา 4 คน ($b = 4$) เพื่อต้องการสรุปอ้างอิงไปสู่คนงานทั้งหมดของโรงงานแห่งนี้ อยากทราบว่าคนงานมีอิทธิพลต่อค่าเฉลี่ยของผลผลิตหรือไม่ ในการศึกษานี้คนงานแต่ละคนทำงานกับเครื่องจักรชนิด I แล้ววัดค่าผลผลิต 3 ครั้ง ($n = 3$) และทำงานกับเครื่องจักรชนิด II แล้ววัดค่าผลผลิต 3 ครั้ง ($n = 3$) ได้ข้อมูลดังตาราง และพล็อตกราฟของค่าเฉลี่ยผลผลิตของคนงาน 4 คน ที่ทำงานกับเครื่องจักร 2 ชนิด (จากบทที่ 8:Applied Statistics : Analysis of Varience and Regression, Ruth M. Mickey, Olive Jean Dunn, and Verginia A. Clark, A John Wiley & Son, Inc.,)

ตาราง6.9 ข้อมูลผลผลิตที่ได้จากเครื่องจักร 2 ชนิด และคนงาน 4 คน

เครื่องจักร, i	คนงาน				
	1	2	3	4	
1	16.0	29.5	19.2	23.0	
	12.9	23.6	25.2	23.2	
	15.5	23.2	26.4	29.1	
$\bar{y}_{.1j.}$	14.80	25.43	23.60	25.10	$\bar{y}_{1..} = 22.23$
2	19.6	24.5	19.1	14.3	
	19.4	15.8	21.6	20.1	
	20.0	17.1	16.9	21.8	
$\bar{y}_{.2j.}$	19.67	19.13	19.20	18.73	$\bar{y}_{2..} = 19.18$
$\bar{y}_{.j.}$	17.23	22.28	21.40	21.92	$\bar{y}_{...} = 20.71$



ภาพ6.11 แสดงอิทธิพลร่วมของคนงานกับชนิดเครื่องจักร

ในตัวอย่างการศึกษานี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับอิทธิพลผสม เพราะปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบกำหนดคือ เครื่องจักร และอีกปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบสุ่มคือ คนงาน ในการสรุปอ้างอิงเกี่ยวกับเครื่องจักรจะสรุปอ้างอิงไปสู่เครื่องจักร 2 ชนิดนี้เท่านั้น ส่วนการสรุปอ้างอิงเกี่ยวกับคนงานจะสรุปอ้างอิงไปสู่ประชากรคนงานทั้งหมดในโรงงานไม่ใช่เฉพาะคนงาน 4 คนที่สุ่มเลือกมาทำงานในการศึกษานี้เท่านั้น

วัตถุประสงค์ของการศึกษานี้คือ 1) เพื่อศึกษาอิทธิพลของเครื่องจักรที่มีต่อผลผลิต 2) เพื่อศึกษาความแปรปรวนของผลผลิตในระหว่างคนงานที่ปฏิบัติงานทั้งหมด ตัวแบบสถิติของการทดลองของตัวแบบที่

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, a \; ; \; j = 1, 2, \ldots, b \; , \; k = 1, 2, \ldots, n$

แต่ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบผสมมีความแตกต่างจากตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลแบบกำหนดคือ

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

$$\beta_j \sim \text{Nid}(0, \sigma_\beta^2)$$

$$(\tau\beta)_{ij} \sim \text{Nid}(0, \sigma_{\tau\beta}^2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim \text{Nid}(0, \sigma^2)$$

และ β_j , $(\tau\beta)_{ij}$ และ ε_{ijk} ทุกตัวมีความเป็นอิสระกันและมีอิทธิพลแบบสุ่ม

จากตัวแบบสถิติจะเห็นว่าค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยของประชากรเหล่านี้สามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ส่วนคือ

1) ค่าเฉลี่ยของการคอมบิเนชั่นของปัจจัยกำหนดและปัจจัยสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ μ

2) อิทธิพลของระดับของปัจจัยกำหนดคือ τ_i

3) อิทธิพลของระดับของปัจจัยสุ่มคือ β_j

4) ปฏิสัมพันธ์ระหว่างปัจจัย คือ $(\tau\beta)_{ij}$

องค์ประกอบของความแปรปรวนของค่าสังเกต $= \text{Var}(y_{ijk})$ ประกอบด้วย

1. σ_β^2 คือ ความแปรปรวนของอิทธิพลคนงาน
2. $\sigma_{\tau\beta}^2$ คือ องค์ประกอบของความแปรปรวนของปฏิสัมพันธ์ระหว่างคนงานและเครื่องจักร
3. σ^2 คือ ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

7.2 การประมาณค่าอิทธิพลกำหนด

ค่าเฉลี่ยของปัจจัยกำหนดระดับที่ i คือ

$$\bar{y}_{i..} = \frac{\sum_j \sum_k y_{ijk}}{bn}$$

เนื่องจาก $E(y_{ijk}) = \mu + \tau_i$

และ $E(\bar{y}_{i..}) = \mu + \tau_i$ ด้วย

ดังนั้นใช้คุณสมบัติของค่าคาดหวัง สามารถสรุปได้ว่า

$\bar{y}_{i..}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของ $\mu + \tau_i$

$\bar{y}_{...}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของ μ

และ $\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i'..}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของ $\tau_i - \tau_{i'}$ เมื่อ $i \neq i'$

โดยที่ $\mu_i = \mu + \tau_i$ หรือ $E(\bar{y}_{i..})$

และ $\mu_i - \mu_{i'}$ ก็เป็นอีกทางหนึ่งที่ใช้แสดงค่า $\tau_i - \tau_{i'}$

ในการหาช่วงความเชื่อมั่นของอิทธิพลกำหนด ต้องใช้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานซึ่งจะอธิบายต่อไปภายหลัง

7.3 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

ตาราง6.10 การวิเคราะห์ความแปรปรวน 2 ปัจจัย สำหรับตัวแบบอิทธิพลผสม ที่มีตัวอย่างเท่ากันทุกกลุ่ม

Source of Variation	SS	df	MS	EMS	F
ปัจจัย A	SS_A	$a-1$	MS_A	$\sigma^2 + n\sigma^2_{ab} + bn\phi(\alpha)$	MS_A/MS_{AB}
ปัจจัย B	SS_B	$b-1$	MS_B	$\sigma^2 + n\sigma^2_{ab} + an\sigma^2_b$	MS_B/MS_{AB}
ปฏิสัมพันธ์AB	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	MS_{AB}	$\sigma^2 + n\sigma^2_{ab}$	MS_{AB}/s^2
Error	SS_E	$ab(n-1)$	MS_E	σ^2	
Total	SS_{Total}	$abn-1$			

ตาราง6.11 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับอิทธิพลของเครื่องจักร และคนงานต่อผลผลิตของโรงงานที่มีตัวแบบอิทธิพลผสม

Source of Variation	SS	df	MS	EMS	F	p
เครื่องจักร	55.82	1	55.82	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{ab} + 12\phi(\alpha)$	1.30	0.34
คนงาน	98.97	3	32.99	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{ab} + 6\sigma^2_{b}$	0.77	0.58
เครื่องจักร*คนงาน	129.10	3	43.03	$\sigma^2 + 3\sigma^2_{ab}$	4.04	0.026
Error	170.43	16	10.65	σ^2		
Total	454.26	23				

7.4 การประมาณค่าองค์ประกอบของความแปรปรวน

ตาราง6.12 แสดงองค์ประกอบของความแปรปรวน พารามิเตอร์ และค่าประมาณของพารามิเตอร์

องค์ประกอบความแปรปรวน	พารามิเตอร์	ค่าประมาณ
ปัจจัยที่มีอิทธิพลสุ่ม	σ^2_{β}	$\dfrac{MS_B - MS_{AB}}{an}$
ปฏิสัมพันธ์ AB ซึ่ง A มีอิทธิพลแบบกำหนด B มีอิทธิพลแบบสุ่ม	$\sigma^2_{\tau\beta}$	$\dfrac{MS_{AB} - MS_E}{n}$
ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน	σ^2	MS_E

องค์ประกอบของความแปรปรวน σ^2_{β} , $\sigma^2_{\tau\beta}$ และ σ^2 สามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

ค่าประมาณของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนคือ

$$\hat{\sigma}^2 = 10.65$$

การคำนวณค่าประมาณขององค์ประกอบของความแปรปรวนสำหรับปฏิสัมพันธ์ระหว่างเครื่องจักรกับคนงานคือ

$$\hat{\sigma}^2_{\tau\beta} = \frac{43.03 - 10.65}{3}$$

$$= 10.79$$

การคำนวณค่าประมาณของปัจจัยคนงานที่มีอิทธิพลแบบสุ่ม คือ

$$\hat{\sigma}^2_{\beta} = \frac{32.99 - 43.03}{2 \times 3}$$

$$= -1.67$$

แต่เนื่องจากค่าความแปรปรวนต้องมีค่า ≥ 0 ในทางปฏิบัติเราจะแทนค่าที่เป็นลบด้วย 0

ดังนั้นความแปรปรวนทั้งหมดของข้อมูลแต่ละค่าคือ

$$\hat{\sigma}^2_{\beta} + \hat{\sigma}^2_{\tau\beta} + \hat{\sigma}^2 = 0 + 10.79 + 10.65$$

$$= 21.44$$

สามารถคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ตามแหล่งของความแปรปรวนได้คือ

ความแปรปรวนเนื่องจากปัจจัยคนงาน = 0%

ความแปรปรวนเนื่องจากปฏิสัมพันธ์ระหว่างเครื่องจักรกับคนงาน $= \frac{10.79}{21.44} \times 100$

$= 50.33\%$

สรุปได้ว่าค่าความแปรปรวนทั้งหมดของข้อมูลแต่ละค่าเนื่องมาจาก 2 แหล่งเท่านั้นคือ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างเครื่องจักรกับคนงาน 50.33% และความคลาดเคลื่อนของการทดลอง 49.67% ไม่มีอิทธิพลแบบกำหนด จึงไม่มีการประมาณค่าองค์ประกอบของความแปรปรวนที่มาจากเครื่องจักร

7.5 การทดสอบสมมติฐาน

จากการสร้างตารางค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยของตัวแบบอิทธิพลแบบผสมของการทดลองในตารางที่ 6.10 ทำให้เราทราบได้ว่าจะทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอะไร และจะคำนวณได้อย่างไร สำหรับตัวแบบอิทธิพลแบบผสมนี้สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

1) การทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับปฏิสัมพันธ์ระหว่าง 2 ปัจจัย สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \sigma^2_{\tau\beta} = 0 \quad \text{คู่กับ} \quad H_1 : \sigma^2_{\tau\beta} > 0$$

สถิติทดสอบคือ

$$F = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ (a – 1)(b – 1) และ ab(n – 1) เมื่อ H_0 เป็นจริง

2) การทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับปัจจัย B ที่มีอิทธิพลแบบสุ่ม สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \sigma^2_\beta = 0 \text{ คู่กับ } H_1 : \sigma^2_\beta > 0$$

สถิติทดสอบคือ

$$F = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ (b – 1) และ (a – 1)(b – 1) เมื่อ H_0 เป็นจริง

3) การทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับปัจจัย A ที่มีอิทธิพลแบบกำหนด

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \tau_i = 0 \text{ คู่กับ } H_1 : \tau_i \neq 0$$

หรือ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$ คู่กับ $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ อย่างน้อยที่สุด 1 คู่ ที่ $i \neq j$

สถิติทดสอบคือ

$$F = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระเท่ากับ (a – 1) และ (a – 1)(b – 1) เมื่อ H_0 เป็นจริง

7.6 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน

จากตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน ในตาราง 6.11 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปได้ว่า

1) มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปได้ว่ามีปฏิสัมพันธ์ระหว่างเครื่องจักรกับคนงาน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือ ยอมรับ $H_1 : \sigma^2_{\tau\beta} > 0$ โดยมีค่าสถิติ F = 4.04 และ p-value = 0.026

2) ไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปได้ว่ามีอิทธิพลของเครื่องจักรต่อผลผลิต นั่นคือ ยอมรับ $H_0 : \tau_i = 0$ โดยมีค่าสถิติ F = 1.30 และ p-value = 0.34

3) ไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปได้ว่ามีอิทธิพลของคนงานต่อผลผลิต นั่นคือ ยอมรับ $H_0 : \sigma^2_\beta = 0$ โดยมีค่าสถิติ F = 0.77 และ p-value = 0.58

และพิจารณาจากภาพปฏิสัมพันธ์ระหว่างเครื่องจักรกับคนงานในภาพ 6.11 จะเห็นว่า เครื่องจักรชนิดที่ 1 มีค่าเฉลี่ยของผลผลิตค่อนข้างแปรปรวนในระหว่างคนงานทั้ง 4 คน ขณะที่ค่าเฉลี่ยของผลผลิตของเครื่องจักรชนิดที่ 2 ไม่ค่อยแปรปรวนในระหว่างคนงานทั้ง 4 คนนั้น

โดยทั่วไปการแปลความหมายค่อนข้างยากเมื่อพบว่าปฏิสัมพันธ์มีนัยสำคัญแต่อิทธิพลหลักไม่มีนัยสำคัญ ในทางปฏิบัติถ้าปฏิสัมพันธ์มีนัยสำคัญเราก็จะใส่อิทธิพลหลักของปัจจัยรวมอยู่ในตัวแบบสถิติของการทดลองด้วย

ผลการวิเคราะห์มีส่วนเกี่ยวข้องกับขนาดตัวอย่าง ที่อาจไม่มีพลังของการทดสอบมากพอที่จะตรวจพบอิทธิพล ข้อสังเกตในการคำนวณค่าสถิติ F ในการทดสอบอิทธิพลหลักของเครื่องจักร เท่ากับ 1.30 ซึ่งเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต $F_{.05\,;\,1,\,3} = 10.10$ แต่ถ้าให้ปัจจัยคนงานมีอิทธิพลแบบกำหนด ตัวหารจะเป็น MS_E ดังนั้นค่าสถิติ F จะเท่ากับ 55.82/10.65 = 5.24 ซึ่งจะเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต $F_{.05\,;\,1,\,16} = 4.49$ การสรุปผลก็จะเปลี่ยนเป็นปฏิเสธ H_0

7.7 ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของประชากร และองค์ประกอบของความแปรปรวน

เมื่อปัจจัย A มีอิทธิพลแบบกำหนด ผู้วิจัยจะสรุปอ้างอิงไปสู่ a ระดับของปัจจัยกำหนด คืออ้างอิงไปสู่ค่าเฉลี่ยของ a ประชากร ถึงแม้ว่าตัวอย่างจะสุ่มมาจาก ab ประชากรก็ตาม เนื่องจากการสรุปอ้างอิงทำโดยการเฉลี่ยทุก ๆ ระดับที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัจจัยสุ่ม B

การสรุปอ้างอิงจะสนใจเฉพาะค่าเฉลี่ยของปัจจัย A (μ_i) และความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของปัจจัย A ($\mu_i - \mu_{i'}$) และ $\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ เท่านั้น เนื่องจากเราไม่ได้สนใจที่ระดับใดระดับหนึ่งโดยเฉพาะของปัจจัยสุ่ม B

การคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของประชากรก็ทำตามวิธีปกติ โดยใช้การแจกแจง t เริ่มจากการประมาณค่า μ_i ด้วย $\bar{y}_{i..}$ และความแปรปรวนของ $\bar{y}_{i..}$ เมื่อกลุ่มตัวอย่างเท่ากันคือ

$$\mathrm{Var}(\bar{y}_{i..}) = \frac{\sigma_{\beta}^{2}}{b} + \frac{\sigma_{\tau\beta}^{2}}{b} + \frac{\sigma^{2}}{bn}$$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเท่ากับ $\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{y}_{i..})}$

และจำนวนชั้นอิสระของค่าสถิติ t มีความเกี่ยวข้องกับ MS_{AB} ในตาราง ANOVA ซึ่งเท่ากับ $(a-1)(b-1)$

ในทำนองเดียวกันเราก็สามารถคำนวณค่าความแปรปรวนของ ($\mu_i - \mu_{i'}$) และ $\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ ได้ดังแสดงในตาราง

ตาราง6.13 แสดงพารามิเตอร์ของประชากร ค่าประมาณ และความแปรปรวนของค่าประมาณ

พารามิเตอร์	ค่าประมาณ	ความแปรปรวนของค่าประมาณ
μ_i	$\bar{y}_{i..}$	$\sigma_b^2/b + \sigma_{ab}^2/b + \sigma^2/bn$
$\mu_i - \mu_{i'}$	$\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i'..}$	$2(\sigma_{ab}^2/b + \sigma^2/bn)$
$\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$	$\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i..}$	$\sum_{i=1}^{a} c_i^2 (\sigma_{ab}^2/b + \sigma^2/bn)$

ตัวอย่างการคำนวณ

1) ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของผลผลิตจากเครื่องจักร

95%ช่วงความเชื่อมั่นของเครื่องจักรชนิดที่ i ประมาณค่าได้คือ

$$\bar{y}_{i..} \pm t_{.025\,;\,B} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\,(\bar{y}_{i..})}$$

ประมาณค่า

$$\mathrm{Var}\,(\bar{y}_{i..}) = \frac{\hat{\sigma}_{\beta}^2}{b} + \frac{\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2}{b} + \frac{\sigma^2}{bn}$$

$$= \frac{0}{4} + \frac{10.79}{4} + \frac{10.65}{4 \times 3}$$

$$= 0 + 2.70 + 0.89$$

$$= 3.59$$

เนื่องจากขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากันทำให้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของผลผลิตจากเครื่องจักรแต่ละตัวคือ

$$\sqrt{\mathrm{Var}\,(\bar{y}_{i..})} = \sqrt{3.59}$$

$$= 1.89$$

และเนื่องจากจำนวนชั้นอิสระของ MS_{AB} เท่ากับ 3 เปิดตารางค่าสถิติ t ที่ระดับนัยสำคัญ เท่ากับ $\alpha/2 = .05/2 = .025$ ได้ค่า $t_{.025\,;\,3} = 3.182$

ดังนั้น 95% ช่วงความเชื่อมั่นของเครื่องจักรชนิดที่ 1 คือ

$$22.23 \pm (3.18)(1.89) = 22.23 \pm 6.01$$

$$= (16.22\,,\,28.24)$$

95% ช่วงความเชื่อมั่นของเครื่องจักรชนิดที่ 2 คือ

$$19.18 \pm (3.18)(1.89) = 19.18 \pm 6.01$$

$$= (13.17\,,\,25.19)$$

2) ช่วงความเชื่อมั่นของความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของผลผลิตระหว่างเครื่องจักร 2 ชนิดนี้ ประมาณค่าได้คือ

$$(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..}) \pm t_{.025\,;\,3} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i'..})}$$

ประมาณค่า

$$\mathrm{Var}(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..}) = 2\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{\tau\beta}}{b} + \frac{\hat{\sigma}^2}{bn}\right)$$

$$= 2\left(\frac{10.79}{4} + \frac{10.65}{4 \times 3}\right)$$

$$= 2(2.70 + 0.89)$$

$$= 7.18$$

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของผลผลิตระหว่างเครื่องจักร 2 ชนิดนี้ คือ

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{y}_{1..} - \bar{y}_{2..})} = \sqrt{7.18}$$

$$= 2.68$$

ดังนั้น 95% ช่วงความเชื่อมั่นของความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของผลผลิตระหว่างเครื่องจักร 2 ชนิดนี้คือ

$$(22.23 - 19.18) \pm (3.18)(2.68) = 3.05 \pm 8.52$$

$$= (-5.47\,,\,11.57)$$

จากช่วงความเชื่อมั่นนี้พบว่าไม่มีหลักฐานเพียงพอที่จะสรุปว่ามีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของผลผลิตระหว่างเครื่องจักร 2 ชนิดนี้

เราสามารถสรุปเป็นตารางแสดงค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

ตาราง6.14 สรุปการคำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์

พารามิเตอร์	**ค่าประมาณ**	**ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน**	**95% ช่วงความเชื่อมั่น**
μ_1	22.23	1.89	$16.22 < \mu_1 < 28.24$
μ_2	19.18	1.89	$13.17 < \mu_2 < 25.19$
$\mu_1 - \mu_2$	3.05	2.68	$-5.47 < \mu_1 - \mu_2 < 11.57$

การประมาณค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างโดยปกติความแปรปรวนเนื่องจากความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (σ^2) น้อยกว่าความแปรปรวน เนื่องจากอิทธิพลสุ่มของปัจจัย (σ^2_β) โดยที่องค์ประกอบของความแปรปรวนที่เนื่องจากความคลาดเคลื่อนมีตัวหารมากกว่า (ในตัวอย่างนี้ bn = 12

ข้อสังเกตเมื่อปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบกำหนดและอีกปัจจัยหนึ่งมีอิทธิพลแบบสุ่ม การหาช่วงความเชื่อมั่นในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสำหรับปัจจัยกำหนดไม่ต้องคำนึงว่ามีปฏิสัมพันธ์ระหว่าง 2 ปัจจัยนั้นหรือไม่ เมื่อทำการคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นเรากำลังทำการเฉลี่ยจากจำนวนระดับทั้งหมดที่เป็นไปได้ของอิทธิพลสุ่มและปฏิสัมพันธ์ ถ้าปฏิสัมพันธ์มีนัยสำคัญ ผู้วิจัยอยากทราบช่วงความเชื่อมั่นของความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของปัจจัยหนึ่งที่ระดับใดระดับหนึ่งโดยเฉพาะของปัจจัยที่สอง และไม่ใช่เพียงค่าเฉลี่ยบนทุกระดับของปัจจัยที่สองในอิทธิพลกำหนด

8. การทดลองแฟคทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย เป็นปัจจัยกำหนด

สมมติว่ามีปัจจัย 3 ปัจจัย คือ A, B และ C ผู้วิจัยกำหนดจำนวนระดับของแต่ละปัจจัยที่สนใจศึกษา ให้ปัจจัย A มี a ระดับ ปัจจัย B มี b ระดับ ปัจจัย C มี c ระดับ ทำการทดลอง n จำนวนซ้ำ เขียนตัวแบบสถิติของการทดลองได้ดังนี้

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

$i = 1, 2, \dots, a \;;\; j = 1, 2, \dots, b \;;\; k = 1, 2, \dots, c \;;\; 1 = 1, 2, \dots, n$

วิธีการคำนวณผลบวกกำลังสอง

$$SS_A = \frac{1}{bcn}\sum_{i}^{a} y_{i\cdots}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abcn}$$

$$SS_B = \frac{1}{acn}\sum_{i}^{b} y_{\cdot j\cdot}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abcn}$$

$$SS_C = \frac{1}{abn}\sum_{k}^{c} y_{\cdot\cdot k\cdot}^2 - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abcn}$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{cn}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} y_{ij\cdot\cdot}^2 - SS_A - SS_B - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abcn}$$

$$SS_{AC} = \frac{1}{bn}\sum_{i}^{a}\sum_{k}^{c} y_{i\cdot k\cdot}^2 - SS_A - SS_C - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abcn}$$

$$SS_{BC} = \frac{1}{an}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{\cdot jk\cdot}^2 - SS_B - SS_C - \frac{y_{\cdots\cdot}^2}{abcn}$$

$$SS_{ABC} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{ijk\cdot}^{2} - SS_{A} - SS_{B} - SS_{C} - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn}$$

$$SS_{Total} = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c}\sum_{\ell}^{n} y_{ijk\ell}^{2} - \frac{y_{....}^{2}}{abcn}$$

SS_{E} = ได้จากการลบ

$$= SS_{total} - SS_{A} - SS_{B} - SS_{C} - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC}$$

การคำนวณค่าสถิติทดสอบ F_0 ต้องอาศัยการพิจารณาจากตารางค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยใน ตาราง 6.15

ตาราง 6.9 ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยของการทดลองแฟคทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย เป็นปัจจัยกำหนด

องค์ประกอบของตัวแบบ	**F a i**	**F b j**	**F c k**	**R n ℓ**	**ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)**
τ_i	0	b	c	n	$\sigma^2 + bcn\sum_{i}^{a}\tau_i^2/(a-1)$
β_j	a	0	c	n	$\sigma^2 + acn\sum_{j}^{b}\beta_j^2/(b-1)$
γ_k	a	b	0	n	$\sigma^2 + abn\sum_{k}^{c}\gamma_k^2/(c-1)$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	c	n	$\sigma^2 + cn\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2/(a-1)(b-1)$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	0	0	n	$\sigma^2 + an\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c}(\beta\gamma)_{jk}^2/(b-1)(c-1)$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	b	0	n	$\sigma^2 + bn\sum_{i}^{a}\sum_{k}^{c}(\tau\gamma)_{ik}^2/(a-1)(c-1)$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	0	0	n	$\sigma^2 + n\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c}(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2/(a-1)(b-1)(c-1)$
$\varepsilon_{(ijk)l}$	1	1	1	1	σ^2

ดังนั้นการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วมโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวนจึงสรุปได้ดังตารางที่ 6.15

ตารางที่ 6.15 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการทดลองแฟคทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย เป็นปัจจัยกำหนด

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	Expected Mean Square	F_0
A	SS_A	a - 1	MS_A	$\sigma^2 + \frac{bcn\sum \tau_i^2}{a-1}$	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	b - 1	MS_B	$\sigma^2 + \frac{acn\sum \beta_j^2}{b-1}$	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$
C	SS_C	c - 1	MS_C	$\sigma^2 + \frac{abn\sum \gamma_k^2}{c-1}$	$F_0 = \frac{MS_C}{MS_E}$
AB	SS_{AB}	(a - 1)(b - 1)	MS_{AB}	$\sigma^2 + \frac{cn\sum\sum (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
AC	SS_{AC}	(a - 1)(c - 1)	MS_{AC}	$\sigma^2 + \frac{bn\sum\sum (\tau\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{AC}}{MS_E}$
BC	SS_{BC}	(b - 1)(c - 1)	MS_{BC}	$\sigma^2 + \frac{an\sum\sum (\beta\gamma)_{ik}^2}{(b-1)(c-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{BC}}{MS_E}$
ABC	SS_{ABC}	(a - 1)(b - 1)(c - 1)	MS_{ABC}	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum\sum (\tau\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	SS_E	abc(n - 1)	MS_E	σ^2	
Total	SS_{Total}	abcn - 1			

ตัวอย่างที่ 5 สุวัฒน์ ธนานุภาพไพศาล (2534) ทำการทดลองเรื่องผลของระดับความเข้มข้นในการใช้ปุ๋ยแอมโมเนียมซัลเฟตและความหนาแน่นของสาหร่ายต่อการเจริญเติบโตของสาหร่ายวุ้น 2 ชนิด มีวัตถุประสงค์เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการเลี้ยงสาหร่ายทะเลบริเวณชายฝั่งของประเทศไทย ผู้วิจัยสนใจศึกษาสาหร่าย 2 ชนิด คือ Gracilaria tenuistipitate และ Polycavernosa fishier ที่ความหนาแน่นของสาหร่าย 3 ระดับ คือ 250, 500 และ 750 กรัมต่อตารางเมตร โดยใช้ปุ๋ยแอมโมเนียมซัลเฟตที่ความเข้มข้น 3 ระดับ คือ 0, 20 และ 40 ppm. หน่วยทดลองคือบ่อดินขนาดกว้าง 5 เมตร ยาว 20 เมตร ลึก 80 เซนติเมตร จำนวน 3 บ่อ เรียงตามแนวกว้างต่อกับคลองส่งน้ำซึ่งรับน้ำจากอ่าวปัตตานี ขณะน้ำลงต่ำสุดจะมีน้ำขังอยู่ในบ่อประมาณ 30 เซนติเมตร และระดับน้ำจะเพิ่มขึ้นตามระดับน้ำขึ้นลงในแต่ละวัน ลักษณะพื้นบ่อเป็นโคลน เก็บข้อมูลโดยวัดอัตราการเจริญเติบโตของสาหร่ายเมื่อครบ 49 วัน วัดเป็นเปอร์เซ็นต์ต่อวัน ได้ข้อมูลดังตาราง

ตาราง 6.16 ข้อมูลแสดงอัตราการเจริญเติบโตของสาหร่ายวุ้น 2 ชนิด (เปอร์เซ็นต์ต่อวัน) เมื่อครบ 49 วัน ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

A ชนิดของสาหร่าย	**B ความหนาแน่นเริ่มทดลอง (กรัม/ตรม.)**	**C ความเข้มข้นปุ๋ย $(NH_4)_2SO_4$ (ppm.)**	**อัตราการเจริญเติบโต (เปอร์เซ็นต์/วัน)**			**$y_{ijk}.$**	**$y_{ij}..$**	**$y_{i}...$**
Gracilaria renuistipitae	**250**	**0**	3.587	2.586	3.360	9.533		
		20	2.798	2.879	4.677	10.324		
		40	4.920	6.937	5.531	17.388	37.245	
	500	**0**	1.673	2.729	2.776	7.178		
		20	0.630	6.123	6.123	9.055		
		40	3.343	2.729	2.729	7.919	24.152	
	750	**0**	2.593	0.145	0.145	10.115		
		20	2.819	4.362	4.362	10.645		
		40	1.520	1.750	1.750	7.263	28.023	89.420

A ชนิดของสาหร่าย	**B ความหนาแน่นเริ่มทดลอง (กรัม/ตรม.)**	**C ความเข้มข้นปุ๋ย $(NH_4)_2SO_4$ (ppm.)**	**อัตราการเจริญเติบโต (เปอร์เซ็นต์/วัน)**			$y_{ijk.}$	$y_{ij..}$	$y_{i...}$
Polycavernosa fisheri	**250**	**0**	1.735	1.871	1.871	5.895		
		20	2.361	0.368	0.368	5.800		
		40	2.309	2.594	2.594	6.672	18.367	
	500	**0**	1.872	1.308	1.308	5.640		
		20	1.669	0.457	0.457	6.577		
		40	2.438	1.649	1.649	6.655	18.872	
	750	**0**	1.705	1.279	1.279	5.606		
		20	1.734	2.067	2.067	5.997		
		40	2.207	2.286	2.286	5.240	16.843	54.082

A × C totals

$Y_{i.k.}$

A	**C**		
	0	**20**	**40**
Gra	26.826	30.024	32.570
Poly	17.141	18.374	18.567

B × C totals

$y_{.jk.}$

B	**C**		
	0	**20**	**40**
250	15.428	16.124	24.060
500	12.818	15.632	14.574
750	15.721	16.642	12.503

B totals

$y_{.j..}$

B		
250	**500**	**750**
55.621	43.024	44.866

C totals

$y_{..k.}$

C		
0	**20**	**40**
43.967	48.398	51.137

กำหนดให้

A แทน ชนิดของสาหร่ายมี 2 ระดับ ; a = 2

B แทน ความหนาแน่นเริ่มทดลองมี 3 ระดับ ; b = 3

C แทน ความเข้มข้นปุ๋ยมี 3 ระดับ ; c = 3

n แทน จำนวนซ้ำ 3 ซ้ำ

วิธีทำ

1. การเขียนสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วม

สมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลหลักที่ต้องการทดสอบคือ

$H_0 : \tau_i = 0$ คู่กับ $H_1 : \tau_i \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : \beta_j = 0$ คู่กับ $H_1 : \beta_j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : \gamma_k = 0$ คู่กับ $H_1 : \gamma_k \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

สมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลร่วมที่ต้องการทดสอบคือ สมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วม 2 ปัจจัย และอิทธิพลร่วม 3 ปัจจัย

$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ คู่กับ $H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : (\tau\gamma)_{ik} = 0$ คู่กับ $H_1 : (\tau\gamma)_{ik} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0$ คู่กับ $H_1 : (\beta\gamma)_{ik} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

$H_0 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$ คู่กับ $H_1 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

2. การทดสอบสมมติฐานทางสถิติโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวน

วิธีการคำนวณผลบวกกำลังสองคือ

$$CT = \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$= \frac{143.502^2}{54}$$

$$= 381.3486$$

$$SS_{Total} = \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c \sum_\ell^n y_{ijk\ell}^2 - CT$$

$$= (3.587^2 + 2.586^2 + \dots + 2.286^2) - 381.349$$

$$= 120.450$$

$$SS_A = \frac{1}{bcn} \sum_i^a y_{i\dots}^2 - CT$$

$$= \frac{1}{27}[89.42^2 + 54.08^2] - 381.349$$

$$= 23.125$$

$$SS_B = \frac{1}{acn}\sum_{j}^{b} y_{\cdot j\cdot\cdot}^2 - CT$$

$$= \frac{1}{18}[55.612^2 + 43.024^2 + 44.866^2] - 381.349$$

$$= 5.136$$

$$SS_C = \frac{1}{abn}\sum_{k}^{c} y_{\cdot\cdot k\cdot}^2 - CT$$

$$= \frac{1}{18}[43.967^2 + 48.398^2 + 51.137^2] - 381.349$$

$$= 1.455$$

$$SS_{AB} = \frac{1}{cn}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} y_{ij\cdot\cdot}^2 - SS_A - SS_B - CT$$

$$= \frac{1}{9}[37.245^2 + ... + 16.843^2] - 23.125 - 5.136 - 381.349$$

$$= 5.166$$

$$SS_{AC} = \frac{1}{bn}\sum_{i}^{a}\sum_{k}^{c} y_{i\cdot k\cdot}^2 - SS_A - SS_C - CT$$

$$= \frac{1}{9}[26.826^2 + ... + 18.567^2] - 23.125 - 1.455 - 381.349$$

$$= 0.519$$

$$SS_{BC} = \frac{1}{an}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{\cdot jk\cdot}^2 - SS_B - SS_C - CT$$

$$= \frac{1}{6}[15.428^2 + ... + 12.503^2] - 5.136 - 1.455 - 381.349$$

$$= 8.485$$

$$SS_{ABC} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{c} y_{ijk\cdot}^2 - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - CT$$

$$= \frac{1}{3}[9.533^2 + ... + 5.240^2] - 23.125 - 5.136 - 1.455 - 5.166 - 381.349$$

$= 5.300$

SS_E = ได้จากการลบ

$= SS_{Total} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC}$

$= 120.450 - 23.125 - 5.136 - 1.455 - 5.166 - .519 - 8.458 - 5.300$

$= 71.29$

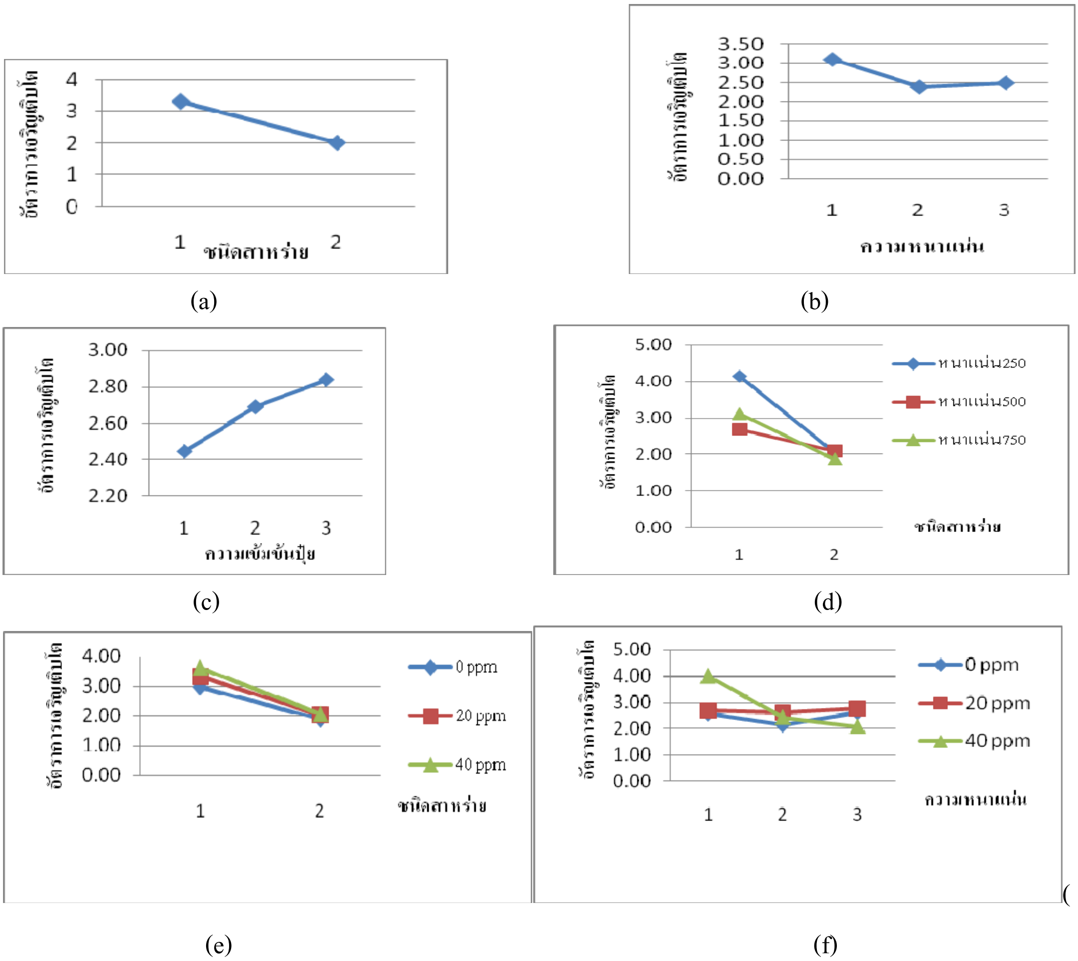
สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังตาราง

ตาราง 6.17 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการทดลองเรื่องผลของระดับความเข้มข้นในการใช้ปุ๋ยแอมโมเนียซัลเฟตและความหนาแน่นของสาหร่ายต่อการเจริญเติบโตของสาหร่ายวุ้น 2 ชนิด ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

Source of Variation	**Sum of Square**	**Degree of Freedom**	**Mean Square**	$\mathbf{F_0}$	**P value**
ชนิดของสาหร่าย (A)	23.125	1	23.125	11.678	.002
ความหนาแน่น (B)	5.136	2	2.568	1.297	.286
ความเข้มข้นปุ๋ย (C)	1.455	2	.727	.397	.695
AB	5.166	2	2.583	1.304	.284
AC	.519	2	.260	.131	.878
BC	8.485	4	2.115	1.068	.387
ABC	5.300	4	1.325	.669	.618
Error	71.290	36	1.980		
Total	120.450	53			

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปได้ว่าอิทธิพลร่วม AB, AC, BC และ ABC ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ สำหรับการทดสอบอิทธิพลหลักของความหนาแน่นของสาหร่ายเมื่อเริ่มทดลองและความเข้มข้นปุ๋ย $(NH4)_2SO_4$ สรุปได้ว่าไม่มีอิทธิพลต่ออัตราการเจริญเติบโตของสาหร่ายวุ้น แต่อัตราการเจริญเติบโตของสาหร่ายวุ้นทั้ง 2 ชนิด แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. การอภิปรายผลโดยการพล็อตกราฟเพื่อดูอิทธิพลหลัก A, B และ C และอิทธิพลร่วม AB, AC และ BC ดังภาพต่อไปนี้



ภาพ 6.11 (a) อิทธิพล A (b) อิทธิพล B (c) อิทธิพล C
(d) อิทธิพล AB (e) อิทธิพล AC (f) อิทธิพล BC

9. การทดลองแฟกทอเรียลที่มี 2 ปัจจัยเป็นปัจจัยกำหนดการออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

ตัวอย่างเช่น การทำการทดลองที่ไม่สามารถทำได้ภายในวันเดียว ผู้วิจัยสามารถทำการทดลอง 1 ซ้ำในวันที่ 1 และทำการทดลองซ้ำที่ 2 ในวันที่ 2 และต่อไปเรื่อย ๆ วัน จึงนับเป็น บล็อก

ตัวแบบสถิติของการทดลองแบบแฟคทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก คือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, 2, \ldots, a \;;\; j = 1, 2, \ldots, b \;;\; k = 1, 2, \ldots, n$

9.1 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

การคำนวณค่าสถิติทดสอบ F_0 ต้องอาศัยการพิจารณาจากตารางค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยในตาราง6.18

ตาราง 6.18 ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยของการทดลองแฟคทอเรียลที่มี 2 ปัจจัย เป็นปัจจัยกำหนด และบล็อกเป็นปัจจัยสุ่มออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

องค์ประกอบของตัวแบบ	F a i	F b j	R n k	ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)
τ_i	0	b	n	$\sigma^2 + bn\sum_i \tau_i^2/(a-1)$
β_j	a	0	n	$\sigma^2 + an\sum_j \beta_j^2/(b-1)$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	n	$\sigma^2 + n\sum_i\sum_j (\tau\beta)_{ij}^2/(a-1)(b-1)$
δ_k	a	b	1	$\sigma^2 + ab\sigma_\gamma^2$
ε_{ijk}	1	1	1	σ^2

ดังนั้นการทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วมโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวน จึงสรุปได้ดังตาราง 6.19

ตาราง 6.19 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการทดลองแฟคทอเรียลมี 2 ปัจจัย เป็นปัจจัยกำหนด และบล็อกเป็นปัจจัยสุ่ม ออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

Source of Variation	Sum of Square	df	Expected Mean Square	F_0
บล็อก	$\frac{1}{ab}\sum_k y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	n - 1	$\sigma^2 + ab\sigma_\delta^2$	
A	$\frac{1}{bn}\sum_i y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	a - 1	$\sigma^2 + \frac{bn\sum \tau_i^2}{a-1}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B	$\frac{1}{an}\sum_j y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	b - 1	$\sigma^2 + \frac{an\sum \beta_j^2}{b-1}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
AB	$\frac{1}{n}\sum_i\sum_j y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_A - SS_B$	(a - 1)(b - 1)	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	ได้จากการลบ	(ab - 1)(n - 1)	σ^2	
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	abn - 1		

9.2 ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 6 สมศักดิ์ บุญดาว (2525) ทำการศึกษาเรื่องประสิทธิภาพของฟอสฟอรัสในปุ๋ยแอมโมเนียมฟอสเฟต (16 – 20 – 0) ที่ตกค้างในดินนาบางดิน ผู้วิจัยสนใจศึกษาช่วงระยะเวลาตกค้างของปุ๋ยฟอสเฟตในดินในช่วงฤดูปลูก 4 ระดับคือ 0, 1, 2 และ 3 ช่วงฤดูปลูก และสนใจศึกษาอัตราปุ๋ยฟอสเฟต 4 ระดับคือ 0, 100, 200, และ 300 mg P ต่อดิน 3 กิโลกรัม ทรีทเมนต์คอมบิเนชันคิดเป็น $4 \times 4 = 16$ ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน ดำเนินการทดลองโดยเพาะกล้าข้าวพันธ์ กข.7 ซึ่งได้จากกองการข้าว กรมวิชาการเกษตร ใช้เมล็ดข้าว 5 เมล็ดต่อถุง เมื่อกล้าข้าวมีอายุ 30 วัน ย้ายลงปลูกบนดินในกระถาง การเตรียมดินใช้ดินสระบุรี 4 กอง ดินแต่ละกอง

ตาราง 6.20 ปริมาณฟอสฟอรัสที่ข้าวดูดกิน หน่วยเป็นมิลลิกรัมต่อกระถางของดินสระบุรี

กองดิน (บล็อก)	**1**				**2**				**3**				**4**			
ช่วงฤดูปลูก (C)	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**
อัตราปุ๋ยฟอสเฟต (R)																
0	11.24	9.78	4.92	3.56	10.80	8.94	5.81	4.65	12.88	9.66	5.55	2.73	12.66	10.04	6.66	3.30
100	32.74	14.74	9.39	5.50	44.04	19.82	6.00	13.05	40.89	19.00	7.24	11.43	34.17	20.24	7.76	5.11
200	54.14	35.11	17.74	5.54	46.47	38.84	9.68	10.67	53.43	32.32	11.97	12.92	44.08	34.08	20.33	5.84
300	55.24	60.62	25.57	9.48	64.48	58.56	23.74	12.94	72.90	52.25	31.91	8.96	55.22	44.44	35.82	7.53
$y_{..k}$	**355.36**				**378.49**				**386.04**				**347.28**			

วิธีทำ

1) ตัวแบบสถิติของการทดลองคือ

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4$$

เมื่อ τ_i คือ อิทธิพลของอัตราปุ๋ยฟอสเฟต

β_j คือ อิทธิพลของช่วงฤดูปลูก

$(\tau\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมของอัตราปุ๋ยฟอสเฟตและช่วงฤดูปลูก

δ_k คือ อิทธิพลของบล็อกได้แก่ชุดของดิน

ε_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลอง

2) ทดสอบสมมติฐานทางสถิติด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวน

การคำนวณผลบวกกำลังสองของอัตราปุ๋ยฟอสเฟต ช่วงฤดูปลูก และอิทธิพลร่วมของอัตราปุ๋ยฟอสเฟตกับช่วงฤดูปลูก คำนวณตามสูตรปกติ สำหรับผลบวกกำลังสองของบล็อกคำนวณได้ดังนี้

$$SS_{\text{บล็อก}} = \frac{1}{ab}\sum_{k=1}^{n} y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= \frac{1}{(4)(4)}[355.36^2 + 378.49^2 + 386.04^2 + 347.28^2] - \frac{1467.17^2}{(4)(4)(4)}$$

$$= 63.67$$

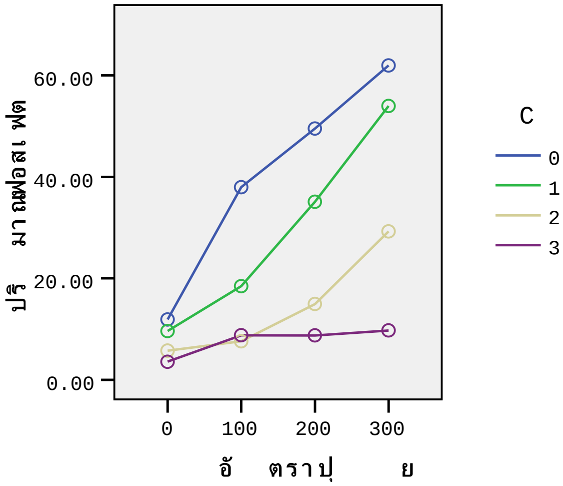
สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังตาราง6.21

ตาราง 6.21 วิเคราะห์ความแปรปรวนปริมาณฟอสเฟตที่ข้าวดูดกิน (มก./กระถาง) ของดินสระบุรี ทำการทดลอง 4 × 4 แฟคทอเรียลออกแบบการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ภายในบล็อก

Source of Variation	Degree of Freedom	Sum of Square	Mean Square	F_0
บล็อก	3	63.671	21.224	1.190
ทรีทเมนต์	15	21892.397	1459.493	
อัตราปุ๋ย (R)	3	8337.227	2779.076	155.839
ช่วงฤดูปลูก (C)	3	10374.442	3458.147	193.918
RC	9	3180.728	353.414	19.818
Error	45	802.476	17.833	
Total	63	22758.544		

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปได้ว่าทั้งอัตราปุ๋ยฟอสเฟตและช่วงฤดูปลูกมีอิทธิพลต่อปริมาณฟอสเฟตที่ข้าวดูดกิน และมีอิทธิพลร่วมระหว่างอัตราปุ๋ยฟอสเฟตและช่วงฤดูปลูกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3) การอภิปรายผลโดยการพล็อตกราฟแสดงอิทธิพลร่วมระหว่างอัตราปุ๋ยฟอสเฟตกับช่วงฤดูปลูก



ภาพ 6.13 กราฟแสดงอิทธิพลร่วมระหว่างอัตราปุ๋ยฟอสเฟตกับช่วงฤดูปลูก

การคำนวณค่าเฉลี่ยของปัจจัยช่วงฤดูปลูกแต่ละช่วงที่ใช้อัตราปุ๋ยต่าง ๆ คือ

ช่วงฤดูปลูก 0 : อัตราปุ๋ย 0 , $\bar{y}_{11.} = (11.29 + 10.8 + 12.88 + 12.66) / 4 = 11.90$

อัตราปุ๋ย 100 , $\bar{y}_{12.} = (32.74 + 44.04 + 40.89 + 34.17) / 4 = 37.96$

อัตราปุ๋ย 200 , $\bar{y}_{13.} = (54.14 + 46.47 + 53.43 + 44.08) / 4 = 49.53$

อัตราปุ๋ย 300 , $\bar{y}_{14.} = (55.24 + 64.48 + 72.90 + 55.22) / 4 = 61.96$

ช่วงฤดูปลูก 1 : อัตราปุ๋ย 0 , $\bar{y}_{21.} = 9.61$

อัตราปุ๋ย 100 , $\bar{y}_{22.} = 18.45$

อัตราปุ๋ย 200 , $\bar{y}_{23.} = 35.09$

อัตราปุ๋ย 300 , $\bar{y}_{24.} = 53.97$

ช่วงฤดูปลูก 2 : อัตราปุ๋ย 0 , $\bar{y}_{31.} = 5.74$

อัตราปุ๋ย 100 , $\bar{y}_{32.} = 7.60$

อัตราปุ๋ย 200 , $\bar{y}_{33.} = 14.93$

อัตราปุ๋ย 300 , $\bar{y}_{34.} = 29.26$

ช่วงฤดูปลูก 3 : อัตราปุ๋ย 0 , $\bar{y}_{41.} = 3.56$

อัตราปุ๋ย 100 , $\bar{y}_{42.} = 8.77$

อัตราปุ๋ย 200 , $\bar{y}_{43.} = 8.74$

อัตราปุ๋ย 300 , $\bar{y}_{44.} = 9.73$

4) การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์โดยใช้วิธีของดันแคน

เราสนใจเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่เป็นช่วงฤดูปลูก 4 ช่วง เนื่องจากอิทธิพลร่วมมีนัยสำคัญ สมมติว่าเราจะทำการเปรียบเทียบที่อัตราปุ๋ย 0

การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ต่าง ๆ คือ

$$S_{\bar{y}_{i1.}} = \sqrt{\frac{MSE}{b}} = \sqrt{\frac{17.833}{4}} = 2.11$$

ค่าเฉลี่ยของปริมาณฟอสเฟตที่ข้าวดูดกินที่แต่ละช่วงฤดูปลูกคือ

ช่วงฤดูปลูก 0 , $\bar{y}_{11.} = 11.91$

ช่วงฤดูปลูก 1 , $\bar{y}_{21.} = 37.96$

ช่วงฤดูปลูก 2 , $\bar{y}_{31.} = 49.53$

ช่วงฤดูปลูก 3 , $\bar{y}_{41.} = 61.96$

เรียงลำดับค่าเฉลี่ยของปริมาณฟอสเฟตที่ข้าวดูดกิน

$\bar{y}_{11.}$	$\bar{y}_{21.}$	$\bar{y}_{31.}$	$\bar{y}_{41.}$
11.91	37.96	49.53	61.96

ช่วงนัยสำคัญจากตารางค่า Significant Ranges for Duncan's Multiple Range Test ที่ระดับนัยสำคัญ .05 สำหรับ $df_{error} = 45$ ได้ช่วงนัยสำคัญที่ p = 2, 3, และ 4 ดังนี้

$$r_{.05(2,45)} = 2.86$$

$$r_{.05(3,45)} = 3.01$$

$$r_{.05(4,45)} = 3.10$$

การคำนวณช่วงนัยสำคัญที่น้อยที่สุด (Least significant ranges) คือ

$$R_2 = r_{.05(2,45)} \cdot S_{\bar{y}_{i1.}} = 2.86\ (2.11) = 5.44$$

$$R_3 = r_{.05(3,45)} \cdot S_{\bar{y}_{i2.}} = 3.01\ (2.11) = 6.35$$

$$R_4 = r_{.05(4,45)} \cdot S_{\bar{y}_{i3.}} = 3.10\ (2.11) = 6.54$$

การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยระหว่างทรีทเมนต์คู่ใด ๆ

เปรียบเทียบ ทรีทเมนต์ 4 คู่กับ 1 : $61.96 - 11.91 = 50.05 > R_4$

เปรียบเทียบ ทรีทเมนต์ 4 คู่กับ 2 : $61.96 - 37.96 = 24 > R_3$

เปรียบเทียบ ทรีทเมนต์ 4 คู่กับ 3 : $61.96 - 49.53 = 12.43 > R_2$

เปรียบเทียบ ทรีทเมนต์ 3 คู่กับ 1 : $49.53 - 11.91 = 37.62 > R_3$

เปรียบเทียบ ทรีทเมนต์ 3 คู่กับ 2 : $49.53 - 37.96 = 11.57 > R_2$

เปรียบเทียบ ทรีทเมนต์ 2 คู่กับ 1 : $37.96 - 11.91 = 26.05 > R_2$

ผลการเปรียบเทียบสรุปได้ว่าที่ช่วงฤดูปลูก 0 การให้อัตราปุ๋ยฟอสเฟตที่แตกต่างกันทั้ง 4 ระดับ ทำให้ข้าวดูดกินปริมาณฟอสเฟตได้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

9.3 การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบสถิติ

9.3.1 คำนวณค่า R^2 สำหรับตัวแบบสถิตินี้คือ

$$R^2 = \frac{SS_{\text{ตัวแบบสถิติ}}}{SS_{\text{Total}}}$$

$$= \frac{SS_{\text{ทรีทเมนต์}} + SS_{\text{บล็อก}}}{SS_{\text{Total}}}$$

$$= \frac{21892.397 + 63.671}{22758.544}$$

$$= 0.9687$$

หมายความว่าตัวแบบสถิตินี้สามารถอธิบายความแปรปรวนในข้อมูลได้ประมาณ 96.87% แสดงว่าตัวแบบสถิตินี้มีความเหมาะสมกับข้อมูลมาก

9.3.2 ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบสถิติโดยการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแบบสถิตินี้คือ

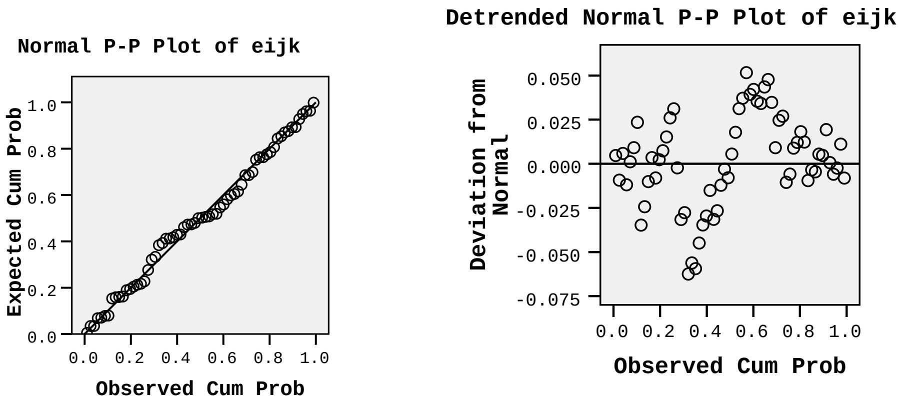
$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

เมื่อ $\hat{y}_{ijk} = \bar{y}_{ij.}$

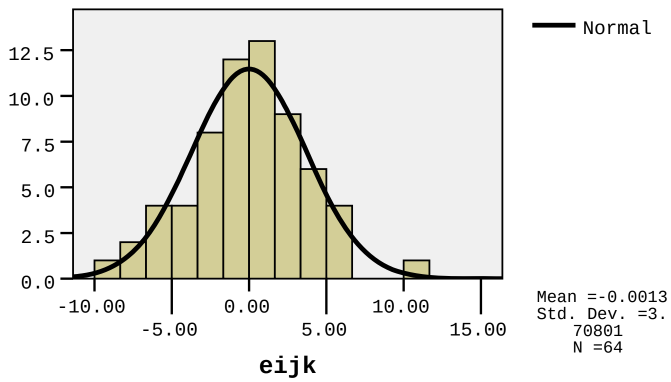
ตาราง 6.22 แสดงค่าความคลาดเคลื่อน (e_{ijk}) ของตัวอย่างที่ 6

อัตราปุ๋ย	**ช่วงฤดูปลูก**			
	0	**1**	**2**	**3**
0	-.66	.17	-.82	.00
	-1.11	-.67	.07	1.09
	.97	.05	-.19	-.83
	.75	.43	.92	-.26
100	-5.22	-3.71	1.79	-3.27
	6.08	1.37	-1.60	4.28
	2.93	.55	-.36	2.66
	-3.79	1.79	.16	-3.66
200	4.61	.02	2.81	-3.20
	-3.06	3.75	-5.25	1.93
	3.90	-2.77	-2.96	4.18
	-5.45	-1.01	5.40	-2.90
300	-6.72	6.65	-3.69	-.25
	2.52	4.59	-5.52	3.21
	10.94	-1.72	2.65	-.77
	-6.74	-9.53	6.56	-2.20

1) ตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติของความคลาดเคลื่อน โดยใช้โปรแกรม SPSS for window พล็อตกราฟ P-P Plot และฮีสโตแกรม ดังภาพ6.14

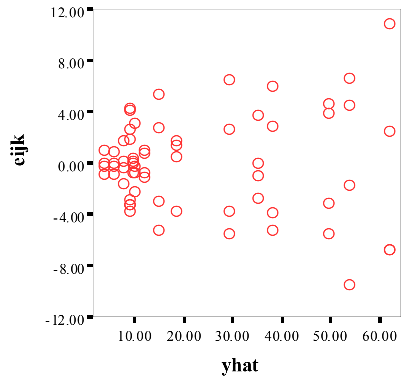


ภาพ 6.14 (ก) P-P Plot ของความคลาดเคลื่อน



ภาพ 6.14 (ข) ฮีสโตแกรมของความคลาดเคลื่อน

2) ตรวจสอบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน โดยพล็อตกราฟความคลาดเคลื่อน (e_{ijk}) กับค่าประมาณของค่าสังเกตแต่ละตัว ($\hat{y}_{ijk}$) ดังภาพ 6.15



ภาพ 6.15 แสดงความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนด้วยกราฟของ e_{ijk} กับ $\hat{y}_{ijk}$

10. การทดลองแฟคทอเรียลที่ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์

จากตัวอย่างปัญหาเรื่องการตรวจจับเป้าหมายของเรดาร์ โดยมีเจ้าหน้าที่ทำงาน 6 คน ซึ่งเจ้าหน้าที่เป็นข้อจำกัดของการสุ่มตัวที่หนึ่ง สมมติว่ามีปัจจัยเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องอีกตัวหนึ่งคือแต่ละวันดำเนินการทดลองได้เพียง 6 ครั้งเท่านั้น ดังนั้นวันจึงเป็นข้อกำหนดของการสุ่มตัวที่สอง ถ้าออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ขนาด 6×6 จะได้รูปแบบของข้อมูลดังแสดงในตาราง6.23

ตาราง 6.23 การทดลองเรื่องการตรวจจับเป้าหมายของเครื่องเรดาร์ที่ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์

วัน	**เจ้าหน้าที่**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	A(f1g1 = 90)	B(f1g2 = 106)	C(f1g3 = 108)	D(f2g1 = 81)	F(f2g3 = 90)	E(f2g2 = 88)
2	C(f1g3 = 114)	A(f1g1 = 96)	B(f1g2 = 105)	F(f2g3 = 83)	E(f2g2 = 86)	D(f2g1 = 84)
3	B(f1g2 = 102)	E(f2g2 = 90)	F(f2g3 = 95)	A(f1g1 = 92)	D(f2g1 = 85)	C(f1g3 = 104)
4	E(f2g2 = 87)	D(f2g1 = 84)	A(f1g1 = 100)	B(f1g2 = 96)	C(f1g3 = 110)	F(f2g3 = 91)
5	F(f2g3 = 83)	C(f1g3 = 112)	D(f2g1 = 92)	E(f2g2 = 80)	A(f1g1 = 90)	B(f1g2 = 98)
6	D(f2g1 = 86)	F(f2g3 = 91)	E(f2g2 = 97)	C(f1g3 = 98)	B(f1g2 = 100)	A(f1g1 = 92)

จากตารางเรากำหนดให้ f_i แทนปัจจัยฟิลเตอร์ระดับที่ i มี 2 ระดับ และกำหนดให้ g_j แทนปัจจัยปริมาณเสียงระดับที่ j มี 3 ระดับ เป็นการทดลอง 3×2 แฟคทอเรียลคิดเป็น 6 ทรีทเมนต์คอมบิเนชัน

ังนี้

$A = f_1g_1$, $B = f_1g_2$, $C = f_1g_3$, $D = f_2g_1$, $E = f_2g_2$ และ $F = f_2g_3$

ตัวแบบสถิติของการทดลองคือ

$$y_{ijk\ell} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + (\tau\beta)_{jk} + \theta_\ell + \varepsilon_{ijk\ell}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 6 \;;\quad j = 1, 2, 3 \;;\quad k = 1, 2 \qquad \ell = 1, 2, \ldots, 6$$

เมื่อ

τ_j คือ อิทธิพลของปริมาณเสียง

β_k คือ อิทธิพลของฟิลเตอร์

α_i คือ ข้อจำกัดของการสุ่มที่เป็นวัน

θ_ℓ คือ ข้อจำกัดของการสุ่มที่เป็นเจ้าหน้าที่

10.1 การวิเคราะห์ความแปรปรวน

คำนวณผลบวกกำลังสองของปัจจัยปริมาณเสียง ปัจจัยฟิลเตอร์ ปฏิสัมพันธ์ของ 2 ปัจจัยนี้ รวมทั้ง วัน และ เจ้าหน้าที่ ซึ่งเป็นบล็อก หรือ ข้อจำกัดของการสุ่มของแถว และ คอลัมน์โดยใช้ตาราง 2 ทาง คำนวณผลรวมของแต่ละทรีทเมนต์คอมบิเนชันได้ดังนี้

ตาราง6.24 ผลรวมของแต่ละทรีทเมนต์คอมบิเนชัน

ปริมาณเสียง	**ฟิลเตอร์**		
	ชนิด 1	**ชนิด 2**	$y_{.j..}$
น้อย	560	512	1072
ปานกลาง	607	528	1135
มาก	646	543	1189
$y_{..k.}$	1813	1583	$y_{....}$ = 3396

ตาราง 6.25 ผลรวมของแถวและคอลัมน์คือ

แถว ($y_{.jk\ell}$)	563	568	568	568	565	564
คอลัมน์ ($y_{ijk.}$)	572	579	597	530	561	557

สรุปเป็นตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

ตาราง 6.26 การวิเคราะห์ความแปรปรวนเรื่องการตรวจจับเป้าหมายของเครื่องเรดาร์ที่ออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร

Source of Variation	Sum of Square	Degress of Freedom	General Formaula for Degress of Freedom	Mean Square	F_0	P value
ปริมาณเสียง (G)	571.50	2	a – 1	285.75	28.86	<0.0001
ชนิดของฟิลเตอร์ (F)	1469.44	1	b – 1	1469.44	148.43	<0.0001
GF	126.73	2	(a – 1)(b – 1)	63.37	6.40	0.0071
วัน (rows)	4.33	5	ab – 1	0.87		
เจ้าหน้าที่ (columns)	428.00	5	ab – 1	85.60		
Error	198.00	20	(ab – 1)(ab – 2)	9.90		
Total	2798.00	35	$(ab)^2 - 1$			

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปได้ว่าทั้งปัจจัยปริมาณเสียงและปัจจัยฟิลเตอร์มีอิทธิพลต่อการตรวจจับเป้าหมายของเรดาร์และมีอิทธิพลร่วมระหว่าง 2 ปัจจัยอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

11. ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย (Expected Mean Square)

ปัญหาสำคัญของการออกแบบการทดลองใด ๆ คือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนซึ่งเกี่ยวข้องกับการคำนวณผลบวกกำลังสองสำหรับองค์ประกอบต่าง ๆ ของตัวแบบสถิติของการทดลอง และจำนวนชั้นอิสระของผลบวกกำลังสองแต่ละตัวนั้น ต่อจากนั้นจึงสามารถสร้างสถิติทดสอบที่เหมาะสมเพื่อทดสอบสมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบได้โดยอาศัยการพิจารณาจากค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยขององค์ประกอบต่าง ๆ ของตัวแบบสถิติของการทดลองนั้น

11.1 กฎการสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย (Montgomery, 1997)

การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยขององค์ประกอบต่าง ๆ ของตัวแบบสถิติของการทดลองนั้นมีกฎการสร้างดังนี้

กฎข้อ 1 ความคลาดเคลื่อนของการทดลอง $e_{ijk\ell n}$ จะเขียนใหม่เป็น $e_{(ij\cdots)n}$ โดยให้ n แทนจำนวนซ้ำ

กฎข้อ 2 สำหรับตัวแบบสถิติที่มีอิทธิพลร่วมของปัจจัยทั้งหมดในตัวแบบที่มีปัจจัย k ปัจจัย จะมีอิทธิพลร่วมของ 2 ปัจจัยที่เป็นไปได้จำนวนเท่ากับ $\binom{k}{2}$ และจะมีอิทธิพลร่วมของ 3 ปัจจัยที่เป็นไปได้จำนวนเท่ากับ $\binom{k}{3}$ เป็นเช่นนี้ต่อไป เรื่อย ๆ และสุดท้ายคืออิทธิพลร่วมของ k ปัจจัย

กฎข้อ 3 สำหรับแต่ละองค์ประกอบของตัวแบบ เราสามารถแบ่งตัวห้อยออกเป็น 3 ชนิดคือ

1. ตัวห้อยที่มีชีวิต คือ ตัวห้อยที่ปรากฏในเทอมและไม่อยู่ในวงเล็บ
2. ตัวห้อยที่ตาย คือ ตัวห้อยที่ปรากฏในเทอมและอยู่ในวงเล็บ
3. ตัวห้อยที่หายไป คือ ตัวห้อยที่ไม่ปรากฏในเทอม แต่ปรากฏในตัวแบบ

ตัวอย่างเช่น เทอม $(\tau\beta)_{ij}$ ตัวห้อย i , j คือ ตัวห้อยมีชีวิต และ k คือ ตัวห้อยที่หายไป อีกตัวอย่างหนึ่งเช่น เทอม $e_{(ij)k}$ ตัวห้อย k คือ ตัวห้อยมีชีวิต และ i , j คือ ตัวห้อยที่ตาย

กฎข้อ 4 จำนวนชั้นอิสระของแต่ละองค์ประกอบในตัวแบบสถิติของการทดลอง คือ ผลคูณของจำนวนระดับของตัวห้อยที่ตาย และจำนวนระดับของตัวห้อยที่มีชีวิต ลบ 1

ตัวอย่างเช่น จำนวนชั้นอิสระของเทอม $(\tau\beta)_{ij}$ คือ (a - 1)(b - 1) และจำนวนชั้นอิสระของเทอม $e_{(ij)k}$ คือ ab(n - 1)

กฎข้อ 5 แต่ละเทอมในตัวแบบสถิติของการทดลองจะมีอิทธิพลแบบสุ่ม (ส่วนประกอบของความแปรปรวน) หรืออิทธิพลแบบกำหนด สำหรับอิทธิพลร่วมที่มีอิทธิพลสุ่มอย่างน้อย 1 ตัว อิทธิพลร่วมจะเป็นแบบสุ่ม กำหนดให้ความแปรปรวนที่มีตัวห้อยเป็นตัวกรีก แทนอิทธิพลแบบสุ่ม

ตัวอย่างเช่น ตัวแบบผสมที่มีปัจจัย A เป็นปัจจัยกำหนด และปัจจัย B เป็นปัจจัยสุ่ม ดังนั้นความแปรปรวนของปัจจัย B คือ σ_{β}^{2} ความแปรปรวนของอิทธิพลร่วม AB คือ $\sigma_{\tau\beta}^{2}$
สำหรับปัจจัย A มีอิทธิพลแบบกำหนด เขียนแทนได้เป็น

$$\frac{\sum_{i}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

คือผลบวกกำลังสองขององค์ประกอบของตัวแบบสถิติหารด้วยจำนวนชั้นอิสระ

กฎข้อ 6 ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย หาได้จากการสร้างตาราง โดยให้แถวแทนด้วยองค์ประกอบของตัวแบบสถิติแต่ละตัว และคอลัมน์แทนตัวห้อยแต่ละตัว บนตัวห้อยเขียนจำนวนระดับของปัจจัยและใส่ F สำหรับอิทธิพลแบบกำหนด และ R สำหรับอิทธิพลแบบสุ่ม

11.2 ขั้นตอนการสร้างตารางค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

1) ในแต่ละแถวใส่ 1 ถ้าตัวห้อยตายในแถวจับคู่กับตัวห้อยในคอลัมน์

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	**F** **a** **i**	**F** **b** **j**	**R** **n** **k**
τ_i			
β_j			
$(\tau\beta)_{ij}$			
$e_{(ij)k}$	1	1	

2) ในแต่ละแถวถ้าตัวห้อยขององค์ประกอบในแถวจับคู่กับตัวห้อยในคอลัมน์ใส่ 0 สำหรับปัจจัยกำหนดและใส่ 1 สำหรับปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	F a i	F b j	R n k
τ_i	0		
β_j		0	
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	
$e_{(ij)k}$	1	1	1

3) ในตำแหน่งว่างที่เหลือในแต่ละแถว เขียนจำนวนระดับของปัจจัยที่อยู่ในแต่ละคอลัมน์

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	F a i	F b j	R n k
τ_i	0	b	n
β_j	a	0	n
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	n
$e_{(ij)k}$	1	1	1

4) เขียนค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย หรือ E(MS) สำหรับองค์ประกอบแต่ละตัวในตัวแบบสถิติโดยมีวิธีการดังนี้

ขั้นแรกคือ ปิดคอลัมน์ที่มีตัวห้อยมีชีวิตแล้วดูว่าในแต่ละแถวที่มีตัวห้อยเหมือนกันกับตัวห้อยในแถวที่เราสนใจนำมาพิจารณาทุกตัว คูณจำนวนที่เห็นด้วยปัจจัยกำหนดหรือปัจจัยสุ่มนั้นแล้วบวกทุกจำนวนเป็น E(MS) ขององค์ประกอบแต่ละตัวในตัวแบบ

ตัวอย่างเช่น ต้องการหาค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยของปัจจัย A หรือ E(MSA) ขั้นแรกปิดคอลัมน์ i และคูณทุกแถวที่มีตัวห้อย i ด้วยจำนวนที่เห็น คือ bn (แถว 1) , 0 (แถว 3) , และ 1 (แถว 4) แล้วบวกทุกจำนวนได้เป็น

$$E(MSA) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

ตาราง 6.27 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย และเป็นปัจจัยแบบกำหนด

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	**F** **a** **i**	**F** **b** **j**	**R** **n** **k**	**ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)**
τ_i	0	b	n	$\sigma^2 + \dfrac{bn\sum_{i}^{a} \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{an\sum \beta_j^2}{b-1}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	n	$\sigma^2 + \dfrac{n\sum_i \sum_j (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$e_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 7 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัยที่ปัจจัย A มี a ระดับ ปัจจัย B มี b ระดับ ปัจจัย C มี c ระดับ ทั้ง 3 ปัจจัยเป็นปัจจัยกำหนด และมี n จำนวนซ้ำ ตัวแบบสถิติของการทดลองนี้คือ

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijk\ell}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, b \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, c \quad ; \quad \ell = 1, 2, \ldots, n$$

ตาราง 6.28 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย

Source of Variation	**Sum of Square**	**Degree of Freedom**	**Mean Square**
A	SS_A	a – 1	MS_A
B	SS_B	b – 1	MS_B
C	SS_C	c – 1	MS_C
AB	SS_{AB}	(a – 1)(b – 1)	MS_{AB}
AC	SS_{AC}	(a – 1)(c – 1)	MS_{AC}
BC	SS_{BC}	(b – 1)(c – 1)	MS_{BC}
ABC	SS_{ABC}	(a – 1)(b – 1)(c – 1)	MS_{ABC}
Error	SS_E	abc(n – 1)	MS_E
Total	SS_{Total}	abcn - 1	

ตาราง 6.29 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย และเป็นปัจจัยแบบกำหนด

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	F a i	F b j	F c k	R n ℓ	ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)
τ_i	0	b	c	n	$\sigma^2 + \frac{bcn\sum \tau_i^2}{(a-1)}$
β_j	a	0	c	n	$\sigma^2 + \frac{acn\sum \beta_j^2}{(b-1)}$
γ_k	a	b	0	n	$\sigma^2 + \frac{abn\sum \gamma_k^2}{(c-1)}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	c	n	$\sigma^2 + \frac{cn\sum\sum(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	b	0	n	$\sigma^2 + \frac{bn\sum\sum(\tau\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	0	0	n	$\sigma^2 + \frac{an\sum\sum(\beta\gamma)^2{}_{jk}}{(b-1)(c-1)}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	0	0	n	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum\sum(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$
$e_{(ijk)\ell}$	1	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 8 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัยที่เป็นปัจจัยสุ่ม

ตาราง 6.30 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 2 ปัจจัย ที่เป็นปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	**R a i**	**R b j**	**R n k**	**ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)**
τ_i	1	b	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_{\beta}$
$(\tau\beta)_{ij}$	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta}$
$e_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 9 การสร้างค่าความคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล3 ปัจจัย ที่เป็นปัจจัยสุ่ม

ตาราง 6.31 การสร้างค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ยสำหรับการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัยที่เป็นปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	**R a i**	**R b j**	**R c k**	**R n** ℓ	**ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)**
τ_i	1	b	c	n	$\sigma^2 + cn\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bcn\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	1	c	n	$\sigma^2 + cn\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + acn\sigma^2_{\beta}$
γ_k	a	b	1	n	$\sigma^2 + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + an\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + abcn\sigma^2_{\gamma}$
$(\tau\beta)_{ij}$	1	1	c	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	1	b	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + an\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	1	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$
$e_{(ijk)\ell}$	1	1	1	1	σ^2

12. การคำนวณค่าสถิติทดสอบ F โดยประมาณ (Approximate F test)

กรณีการทดลองแฟคทอเรียลที่มี 3 ปัจจัย ให้ปัจจัย A เป็นปัจจัยกำหนด ปัจจัย B และ C เป็นปัจจัยสุ่มที่มีจำนวนระดับ a, b, c ระดับ ตามลำดับ มีจำนวนซ้ำเท่ากับ n

ตาราง 6.32 การสร้าง Expected Mean Square สำหรับการทดลองแฟคทอเรียล 3 ปัจจัย ให้ปัจจัย A เป็นปัจจัยกำหนด ปัจจัย B และ C เป็นปัจจัยสุ่ม

องค์ประกอบของตัวแบบสถิติ	**F** **a** **i**	**R** **b** **j**	**R** **c** **k**	**R** **n** ℓ	**ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย E(MS)**
τ_i	0	b	c	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta} + \frac{bcn\sum \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	1	c	n	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma} + acn\sigma^2_{\beta}$
γ_k	a	b	1	n	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma} + abn\sigma^2_{\gamma}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	1	c	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	b	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	1	1	n	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	1	1	n	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$
$\varepsilon_{(ijkk)\ell}$	1	1	1	1	σ^2

ตัวอย่างที่ 10 การศึกษาเกี่ยวกับความดันที่ลดลงของกังหันน้ำจาก Montgomery (1997) ซึ่งมีปัจจัยที่ศึกษา 3 ปัจจัย ให้ปัจจัย A คืออุณหภูมิของแก๊ส เป็นปัจจัยกำหนดมี 3 ระดับ คือ 60, 75, และ 90 องศาฟาเรนไฮด์ ปัจจัย B คือ เจ้าหน้าที่เป็นปัจจัยสุ่มมี 4 คน และปัจจัย C คือความดันเป็นปัจจัยสุ่มมี 3 ระดับ การศึกษานี้เป็นการทดลอง $3 \times 4 \times 3$ แฟคทอเรียล มีจำนวนซ้ำ 2 ซ้ำ เก็บข้อมูลได้ดังตาราง

ตาราง 6.33 ข้อมูลความดันที่ลดลงซึ่งโค้ดข้อมูลแล้ว

ความดัน (C)	**อุณหภูมิของแก๊ส**											
	60°F				**75°F**				**90°F**			
	เจ้าหน้าที่ (B)				**เจ้าหน้าที่ (B)**				**เจ้าหน้าที่ (B)**			
	1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-2	0	-1	4	14	6	1	-7	-8	-2	-1	-2
	-3	-9	-8	-4	14	0	2	6	-8	20	-2	1
2	-6	-5	-8	-3	22	8	6	-5	-8	1	-9	-8
	4	-1	-2	-7	24	6	2	2	3	-7	-8	3
3	-1	-4	0	-2	20	2	3	-5	-2	-1	-4	1
	-2	-8	-7	4	16	0	0	-1	-1	-2	-7	3

ตัวแบบสถิติของการทดลองคือ

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ $H_0 : \tau_i = 0$ คู่กับ $H_1 : \tau_i \neq 0$

สถิติทดสอบ คือ $$F_0 = \frac{MS'}{MS''}$$

เมื่อ $$MS' = MS_A + MS_{ABC}$$

$$MS'' = MS_{AB} + MS_{AC}$$

ซึ่ง $$E(MS') - E(MS'') = \frac{bcn\sum\tau_i^2}{a-1}$$

หาได้จาก $$E(MS_A - MS_{AC} - MS_{AB} + MS_{ABC}) = \frac{bcn\sum\tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_A + MS_{ABC}) - E(MS_{AC} + MS_{AB}) = \frac{bcn\sum\tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS') - E(MS'') = \frac{bcn\sum\tau_i^2}{a-1}$$

$$MS' = MS_A + MS_{ABC}$$

$$= 308.39 + 19.26$$

$$= 327.65$$

$$MS'' = MS_{AB} + MS_{AC}$$

$$= 134.91 + 44.77$$

$$= 179.68$$

$$F_0 = \frac{327.65}{179.68}$$

$$= 1.82$$

ตาราง 6.34 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการศึกษาเกี่ยวกับความดันที่ลดลงของกังหันน้ำ

Source of Variation	**Sum of Square**	**df**	**E(MS)**	**MeanS quar**	**F_0**	**P value**
อุณหภูมิ (A)	616.78	2	$\sigma^2 + bn\sigma^2_{\tau\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta} + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + \frac{bcn\sum \tau_i^2}{a-1}$	308.39	1.82	0.24
เจ้าหน้าที่ (B)	175.56	3	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma} + acn\sigma^2_{\beta}$	58.52	1.45	0.32
ความดัน (C)	5.03	2	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma} + abn\sigma^2_{\gamma}$	2.52	0.06	0.94
AB	809.44	6	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + cn\sigma^2_{\tau\beta}$	134.91	7.00	2.21×10^{-3}
AC	179.06	4	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma} + bn\sigma^2_{\tau\gamma}$	44.77	2.32	0.12
BC	242.19	6	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta\gamma}$	40.37	1.16	0.35
ABC	231.07	12	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta\gamma}$	19.26	0.56	0.86
Error	1248.00	36	σ^2	34.67		
Total	3507.11	71				

สถิติทดสอบคือ

$$F_0 = \frac{MS'}{MS''}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F ที่มีจำนวนชั้นอิสระ p และ q

จำนวนชั้นอิสระ
$$p = \frac{(MS_A + MS_{ABC})^2}{MS_A^2 / df_A + MS_{ABC}^2 / df_{ABC}}$$
$$= \frac{(327.65)^2}{(308.39)^2 / 2 + (19.26)^2 / 12}$$
$$= 2.26$$
$$\simeq 2$$

จำนวนชั้นอิสระ
$$q = \frac{(MS_{AB} + MS_{AC})^2}{MS_{AB}^2 / df_{AB} + MS_{AC}^2 / df_{AC}}$$
$$= \frac{(179.68)^2}{(134.91)^2 / 6 + (44.77)^2 / 4}$$
$$= 6.34$$
$$\simeq 6$$

เปรียบเทียบค่าสถิติที่คำนวณได้ $F_0 = 1.82$ กับค่าวิกฤติ $F_{.05,2,6} = 5.14$ ค่าสถิติ F_0 น้อยกว่าค่าวิกฤติจึงสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธ $H_0 : \tau_i = 0$

จากตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนสรุปได้ว่ามีอิทธิพลร่วม AB มาก และมีอิทธิพลร่วม AC เล็กน้อย และไม่มีอิทธิพลหลักของทั้ง 3 ปัจจัย ซึ่งอิทธิพลของ A และ B ถูกซ่อนอยู่ในอิทธิพลร่วม AB

แบบฝึกหัดบทที่ 6

จงตอบคำถามต่อไปนี้ในข้อ 1 – 5

ก. จงอธิบายการออกแบบการทดลอง พร้อมวาดรูปประกอบ

ข. จงเขียนตัวแบบสถิติของการทดลอง พร้อมอธิบายแต่ละเทอม

ค. ข้อมูลคืออะไร และจงเขียนรูปแบบข้อมูล

1. การทดลองการปรับสภาพการเพาะเลี้ยงเนื้อเยื่อหน่อไม้ฝรั่งก่อนนำออกปลูก วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสูตรอาหารที่เหมาะสมในการชักนำให้เกิดราก ผู้วิจัยสนใจศึกษาสูตรอาหารที่ใช้น้ำตาลทราย 2 ระดับ คือ อัตรา 50 และ 60 กรัมต่อลิตร ร่วมกับ IBA เข้มข้น 3 ระดับ คือ 0.04, 0.08 และ 0.16 มิลลิกรัมต่อลิตร

   ดำเนินการทดลองโดยเลี้ยงเนื้อเยื่อหน่อไม้ฝรั่งพันธ์ Brock's Improve ในสูตรอาหารต่าง ๆ ในขวด ๆ ละ 3 ต้น ทำการทดลอง 10 ซ้ำ เมื่อครบ 60 วัน นับจำนวนต้นที่เกิดรากของหน่อไม้ฝรั่ง

2. การทดลองเรื่องอิทธิพลของระดับความเป็นกรด – ด่าง ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงของเหล็ก, แมงกานีส, อลูมินัม, กำมะถัน, ไนโตรเจน, ฟอสฟอรัส และผลผลิตของข้าวโพดที่ปลูกในดินองครักษ์ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลตกค้างของปูนและปุ๋ยฟอสเฟสที่มีต่อผลผลิตของข้าวที่ปลูกในฤดูถัดมา การทดลองใช้ดินองครักษ์ปลูกข้าวในกระถางดินเผา ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 7 ½ นิ้ว สูง 7 ½ นิ้ว กระถางละ 2 ต้น ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัจจัย 3 ปัจจัย คือ

   1. พันธ์ข้าว 2 พันธ์ คือ พันธ์ตะเภาแก้ว 161 และพันธ์ กข.21 อายุ 7 วัน
   2. ปุ๋ย 2 สูตร คือ หินฟอสเฟตบดผ่านตะแกรง 100 เมช และทริปเปิลซูเปอร์ฟอสเฟต
   3. ปูนแคลเซียมไฮดรอกไซด์ ใส่ดินให้มี pH 3.0, 4.4, 5.4, 6.0 c]t 7.0

   ทำการทดลองในเรือนทดลอง 3 หลัง ในแต่ละเรือนทดลองจะทำการทดลองครบทุก ทรีทเมนต์และเก็บข้อมูลเป็นน้ำหนักแห่งของตอซังข้าว (กรัมต่อกระถาง)

3. การศึกษาเรื่องผลตอบสนองของข้าวโพดต่อการใส่ปุ๋ยฟอสเฟตในอัตราต่าง ๆ ในดินชุดปากช่องตาคลีและสัตหีบ วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาอิทธิพลของอัตราปุ๋ยฟอสเฟตระดับต่าง ๆ ที่มีต่อจำนวนต้นที่ออกดอกตัวผู้ของข้าวโพด ผู้วิจัยสนใจศึกษาปุ๋ยแอมโมเนียมซัลเฟต (21% N) ปุ๋ยทริปเปิลซูเปอฟอสเฟต (45% P_2O_5) และปุ๋ยโปแตสเซียมคลอไรด์ (60% K_2O) ในการทดลองใช้ปุ๋ย 3 ชนิดดังนี้

   1. ใช้อัตราปุ๋ย N จำนวน 2 ระดับ คือ 0 และ 24 กก.ต่อไร่
   2. ใช้อัตราปุ๋ย P_2O_5 จำนวน 8 ระดับ คือ 0, 4.8, 9.6, 14.4, 19.2, 24.0, 28.8 และ 33.6 กก.ต่อไร่
   3. ใช้อัตราปุ๋ย K_2O จำนวน 2 ระดับ คือ 0 และ 16 กก.ต่อไร่

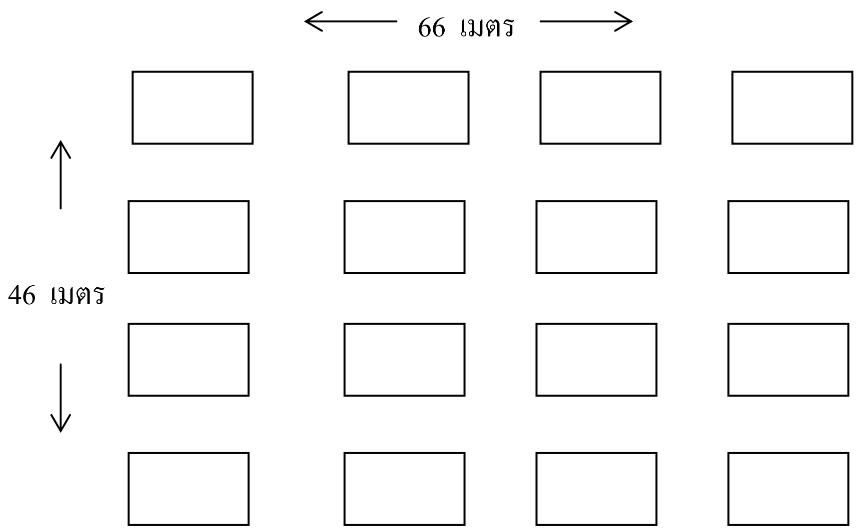
ดำเนินการทดลองในชุดดิน 3 ชุด คือ ดินชุดปากช่องทำการทดลองในไร่ของกสิกร อ.เมือง จ.ลพบุรี ดินชุดตาคลี ทำการทดลองในไร่ของกสิกร อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา และดินชุดสัตหีบทำการทดลองในไร่ของกสิกร อ.ปลวกแดง จ.ระยอง การทดลองในไร่ทั้ง 3 ชุดดินนี้ ได้ทำการทดลองปลูกข้าวโพดลูกผสมพันธ์สุวรรณ 1 แล้วเก็บข้อมูลโดยนับจำนวนต้นที่ออกดอกตัวผู้

4. การทดลองเรื่องวิธีเขตกรรมแบบต่าง ๆ ที่มีผลต่อการสูญเสียดินและผลผลิตของมันสำปะหลังบนพื้นที่ไร่นาของเกษตรกร ชุดดินมาบบอน อำเภอศรีราชา จังหวัดชลบุรี (2534) มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาเปรียบเทียบวิธีเขตกรรมแบบต่าง ๆ ที่มีผลต่อการสูญเสียดิน การศึกษาปริมาณการสูญเสียดินในรูปน้ำหนักตะกอนแห้งต่อหน่วยพื้นที่ ตะกอนเก็บจากร่องรองรับตะกอน ซึ่งปูด้วยผ้าพลาสติกเก็บตะกอนทุกเดือนหลังจากปลูกมันสำปะหลังจนถึงระยะเก็บเกี่ยวผลผลิตมันสำปะหลัง

วิธีเขตกรรมที่สนใจศึกษามี 3 ปัจจัยคือ

1. การไถพรวน มี 2 ระดับ คือ ไม่ไถพรวน และไถ 2 ครั้ง และพรวน 2 ครั้ง
2. การใช้สารเคมีกำจัดวัชพืช และการไม่ใช้สารเคมีกำจัดวัชพืช
3. การยกร่อง ทำ 2 แบบ คือ ยกร่องขวางความลาดเท และยกร่องขึ้น – ลง ตามความลาดเท

ดำเนินการทดลองบนพื้นที่ไร่นาของเกษตรกร แปลงทดลองกว้าง 10 เมตร ยาว 15 เมตร ใช้แปลงทดลองทั้งหมด 16 แปลง แต่ละแปลงห่างกัน 2 เมตร บนพื้นที่ขนาด 46×66 เมตร ให้แต่ละแปลงมีโอกาสได้รับวิธีเขตกรรมแบบต่าง ๆ เท่า ๆ กัน ทำการทดลอง 2 ซ้ำ



ภาพ การออกแบบการทดลอง

5. การศึกษาเรื่องผลของช่วงระยะเวลาการให้น้ำและวัสดุปลูกต่อการเจริญเติบโตและอัตราการคายน้ำของต้นสาวน้อยประแป้ง วัตถุประสงค์เพื่อศึกษาอัตราส่วนของขุยมะพร้าวที่ผสมลงในวัสดุปลูกเพื่อให้มีความเหมาะสมกับต้นสาวน้อยประแป้งที่ปลูกในกระถาง โดยทำให้ยืดช่วงระยะเวลาการให้น้ำให้ยาวนานขึ้น ทำการทดลองภายในโรงเรือนกระจก ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัจจัย 3 ปัจจัย คือ

1. อัตราส่วนของวัสดุปลูก ทราย : ขุยมะพร้าว มี 3 ระดับ คือ 7 : 3 , 5 : 5 และ 3 : 7 โดยปริมาตร
2. ช่วงระยะเวลาการให้น้ำมี 3 ระดับ คือ 7 วัน 14 วัน และ 21 วัน
3. เวลาหลังจากเริ่มการทดลองมี 3 ระดับ คือ ที่ 42 วัน 84 วัน และ 126 วัน

การเตรียมต้นสาวน้อยประแป้งเริ่มก่อนทำการทดลองศึกษา 2 เดือน โดยคัดเลือกต้นพันธ์ของต้นสาวน้อยประแป้งแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม โดยแบ่งตามจำนวนและขนาดของใบ เส้นผ่าศูนย์กลางของลำต้นและความสมบูรณ์ต้นมีขนาดใกล้เคียงกัน ตัดส่วนโคนทิ้งโดยให้แต่ละท่อน