

Chapter 4

Math Model

อาจารย์วีระเกษมทร สวนพกา

Weerakaset Suanpaga
(D.ENG-Candidate)

Department of Civil Engineering
Faculty of Engineering , Kasetsart University
Bangkok, Thailand

<http://pirun.ku.ac.th/~fengwks/mathcomp>

1

บทที่ 4

การจำลองแบบทางคณิตศาสตร์

- ⇒ 4.0 ประเภทและลักษณะของข้อมูล
- ⇒ 4.1 การจำลองแบบทางคณิตศาสตร์
- ⇒ 4.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- ⇒ 4.3 สมการเชิงเส้น
- ⇒ 4.4 อสมการเชิงเส้น
- ⇒ 4.5 กำหนดการเชิงเส้น
- ⇒ 4.6 แบบจำลองไม่เชิงเส้น

2

4.0 ประเภทและลักษณะของข้อมูล

ข้อมูลมีสองประเภทคือ

⇒ 1. ข้อมูลเชิงปริมาณ (Quantitative data)

สามารถใช้เครื่องมือวัดได้ มีหน่วยวัดได้ เป็นมาตรฐาน เช่น ความสูง (เมตร), น้ำหนัก (kg), อายุ (year) ...

⇒ 2. ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative data)

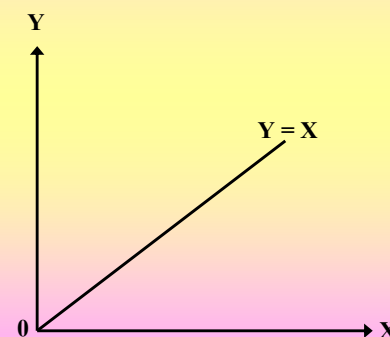
วัดออกมาเป็นตัวเลขได้ยาก เช่น ความดี ความชั่ว ความรัก ความคิดถึง...

ถ้าจะวัดออกมาเป็นตัวเลขต้องหา scale เทียบเป็นเชิงปริมาณก่อน ถึงจะวัดออกมาได้ มักนิยมนำวัดเป็นระดับ เช่น มาก ปานกลาง ต่ำ การวัดมักจะสร้างแบบจำลองเช่น 1 ความคิดถึง = 1 miss call

3

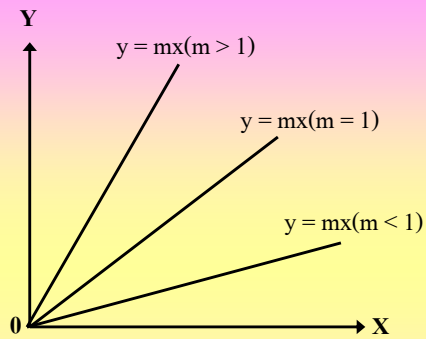
4.1 สมการเส้นตรง (Linear Equation)

1. สมการเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด



สมการเส้นตรงผ่านจุด
กำเนิดทำมุม 45 องศา ทั้ง
แกน x และแกน y

4



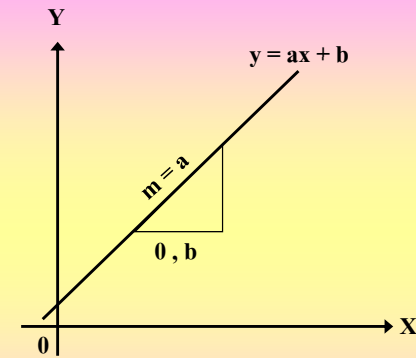
$Y = mx$ เมื่อ $m = 1$

$Y = x$ เส้นตรงอยู่ระหว่าง
แกน x และแกน y

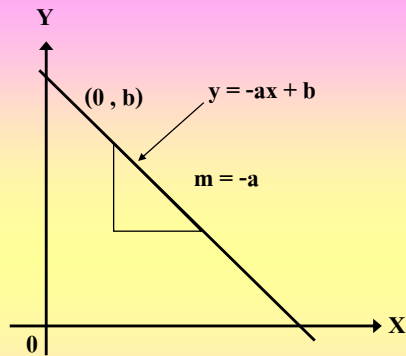
ถ้า $m > 1$ เส้นตรงชันมากกว่า $y = x$

ถ้า $m < 1$ เส้นตรงชันน้อยกว่า $y = x$

4.2 สมการเส้นตรงตัดแกน

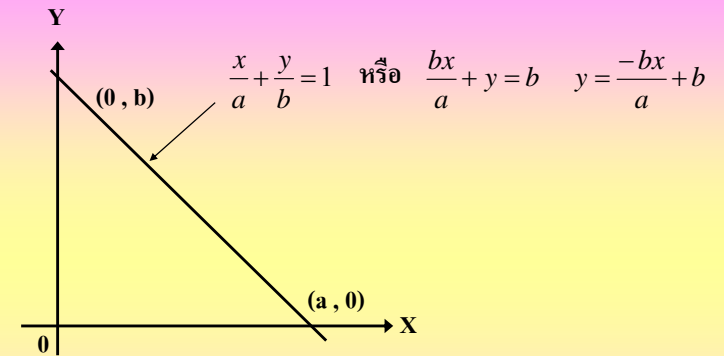


สมการเส้นตรงที่มีความชัน a และจุดตัดแกน y ที่ b

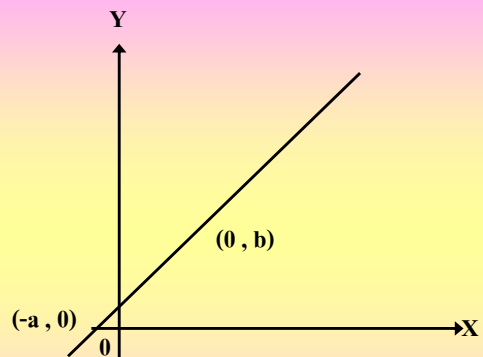


สมการเส้นตรงที่มีความชัน $-a$
และจุดตัดแกน y ที่ b

4.3 สมการเส้นตรงตัดแกน



สมการนี้มีจุดตัดที่ $(a, 0)$ บนแกน
 x มีจุดตัดบนแกน y ที่ $(0, b)$ มี
ความชัน $-b/a$



$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1$$

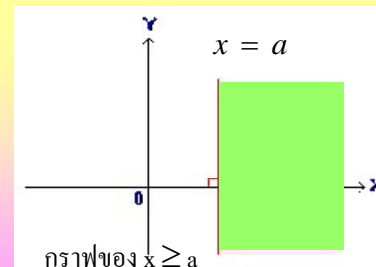
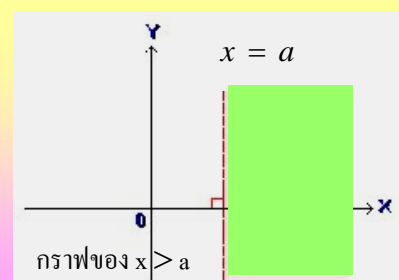
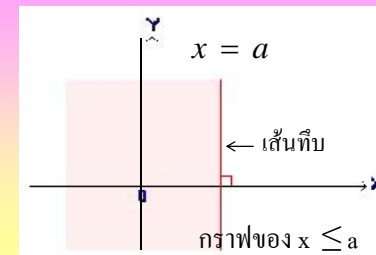
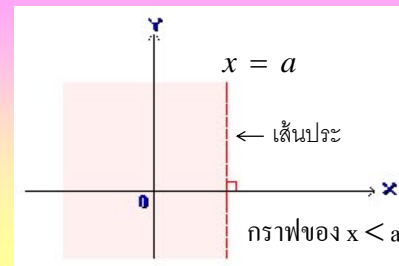
$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} + 1$$

$$y = \frac{bx}{a} + b$$

สมการนี้มีความชัน $\frac{b}{a}$

9

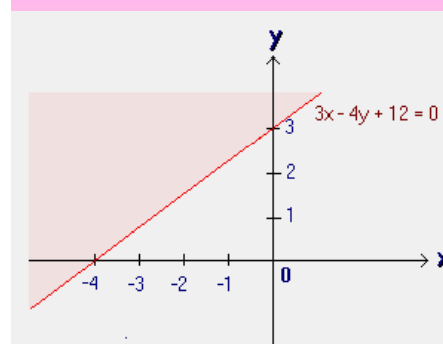
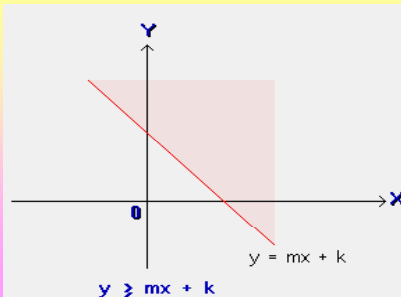
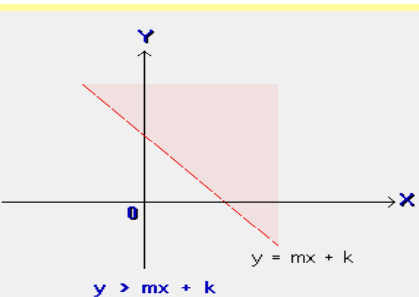
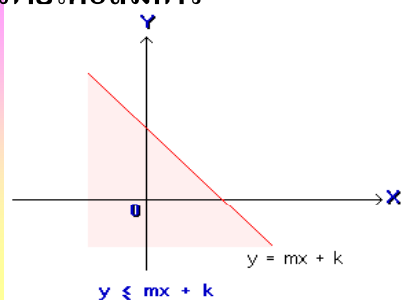
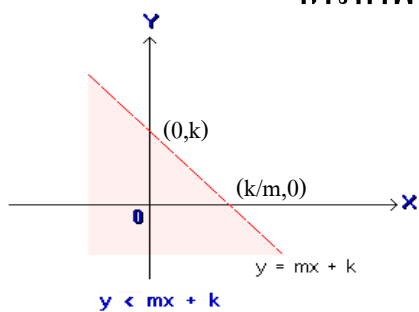
4.4 อสมการเชิงเส้น



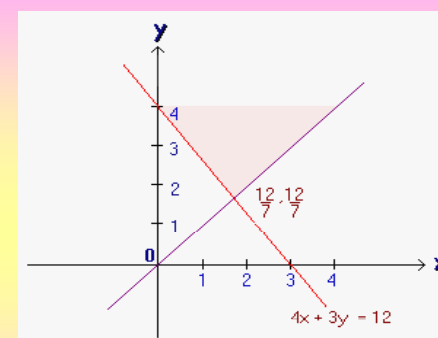
ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันอสมการ

10

การหาพื้นที่ภายใต้สมการ



ผลของอสมการ $y \geq (3/4)x + 3$



ผลจากการรวมกันของสองอสมการ

12

4.5 กำหนดการเชิงเส้น (LINEAR PROGRAM)

1. ตั้ง function เป้าหมายของปัญหา (objective function)
maximum or minimum
2. หนทางปฏิบัติที่เลือกได้ เลือกทางปฏิบัติที่เหมาะสม
3. เงื่อนไข เลือกตัวแปรที่เหมาะสม
4. ตัวแปร มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

13

Ex.1 Minimum Cost Problem

		Productivity (tons/day)		
	Mine	Tin	Copper	Zinc
x^1	A	6	2	4
x^2	B	2	2	12

<u>days</u> <u>week</u>	Condition of Production (order)		
	Tin	12	tons/week
	Copper	8	tons/week
	Zinc	24	tons/week

14

$$6x_1 + 2x_2 \geq 12 \quad \text{Target}$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8 \quad \text{Cost of mine A 40,000 บาท/วัน}$$

$$4x_1 + 12x_2 \geq 24 \quad \text{Cost of mine B 32,000 บาท/วัน}$$

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{6} \geq 1 \quad \text{Minimum Cost Equation}$$

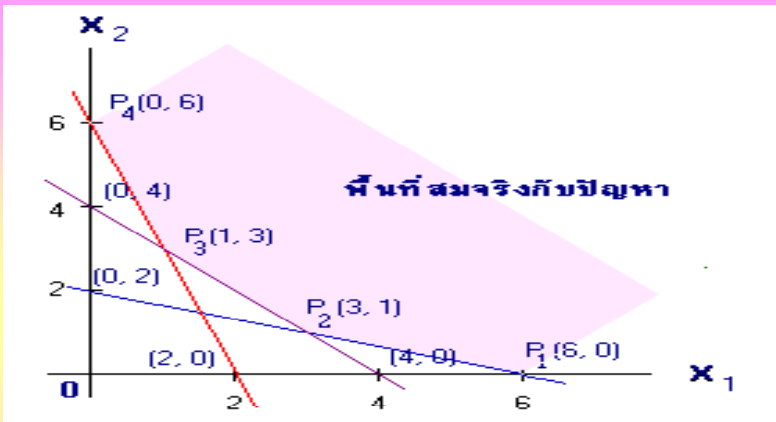
$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} \geq 1 \quad \text{Min Cost} = 40,000 x_1 + 32,000 x_2$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{2} \geq 1 \quad = \text{min}$$

15

	P_1	P_2	P_3	P_4
X_1	6	3	1	0
X_2	0	1	3	6
Cost min	240,000	152,000	136,000	192,000
Minimum Cost = $40,000 \times 1 + 32,000 \times 3$				
= 136,000 บาท/สัปดาห์				
Mine A ($x_1 = 1$ days/week)				
Mine B ($x_2 = 3$ days/week)				

16



แสดงการเขียนกราฟและเลือกพื้นที่

สมจริง Minimum Cost = $40,000 \times 1 + 32,000 \times 3$
 $= 136,000$ บาท/สัปดาห์

Ex.2 Maximize Profit Problem

		Raw	Form	Quality
	Type	Mat(hrs)	Prep(hrs)	Test(hrs)
X_1	1	6	3	4
X_2	2	6	6	2

$\frac{Pcs}{week}$	Condition		
	Raw Mat	420	hrs/week
	Form Prep	300	hrs/week
	Quality	240	hrs/week

$$6x_1 + 6x_2 \leq 420$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 300$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$\frac{x_1}{70} + \frac{x_2}{70} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{100} + \frac{x_2}{50} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{60} + \frac{x_2}{120} \leq 1$$

Target

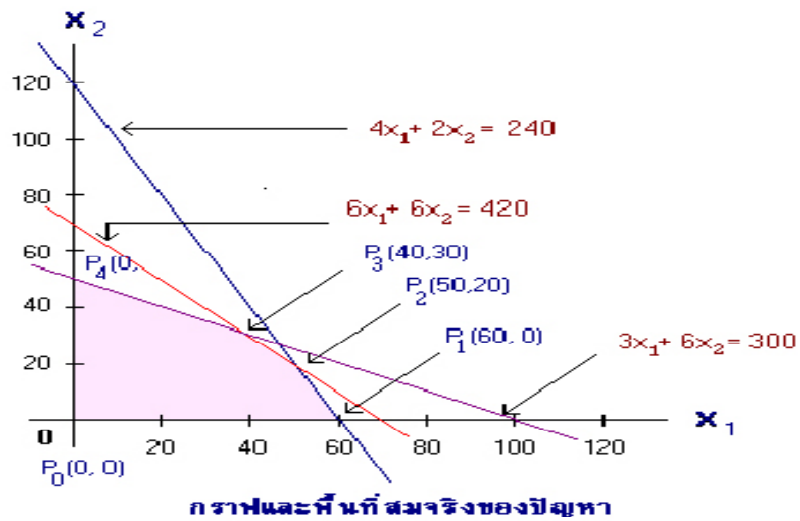
Profit of Type 1	300 บาท/ชิ้น
Profit of Type 2	200 บาท/ชิ้น

Target Equation

$$\text{Profit} = 300x_1 + 200x_2 = \max$$

	P_1	P_2	P_3	P_4
X_1	60	50	40	0
X_2	0	20	30	50
Profit	18,000	19,000	18,000	10,000

Maximum Profit = $300 \times 50 + 200 \times 2$
 $= 19,000$ บาทต่อสัปดาห์



กราฟและพื้นที่สมจริงของปัญหา

แสดงการเขียนกราฟและเลือกพื้นที่ที่สมจริงกับ อสมการ

$$\begin{aligned} \text{Maximum Profit} &= 300 \times 50 + 200 \times 2 \\ &= 19,000 \text{ บาทต่อสัปดาห์} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1

- โรงงานต้องการผลิตสินค้า 2 ชนิดคือ A และ B โดยที่มีส่วนผสมดังนี้

	C	D
A	3	4
B	2	6

ความสามารถในการจัดหาวัตถุดิบ C เท่ากับ 240 units

ความสามารถในการจัดหาวัตถุดิบ D เท่ากับ 300 units

ถ้าต้องการกำไรสูงสุด

โดยกำไรจากสินค้า A 100 บาท/units

โดยกำไรจากสินค้า B 200 บาท/units

ให้วาดกราฟ และหาคำไรสูงสุด

แบบฝึกหัด 2

- โรงงานต้องการผลิตสินค้า 2 ชนิดคือ A และ B โดยใช้เวลาทำงานดังนี้

	C	D
A	3	4
B	2	6

ความสามารถในการทำขบวนการ C เท่ากับ 240 hrs

ความสามารถในการทำขบวนการ D เท่ากับ 480 hrs

ถ้าต้องการกำไรสูงสุด

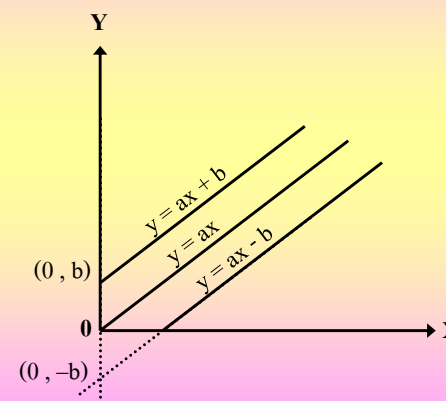
โดยกำไรจากสินค้า A 100 บาท/ชิ้น

โดยกำไรจากสินค้า B 200 บาท/ชิ้น

ให้วาดกราฟ และหาคำไรสูงสุด

แบบจำลอง (Model) ของความสัมพันธ์ในข้อมูล

โมเดลเชิงเส้น (เส้นตรง)



$$y = ax + b$$

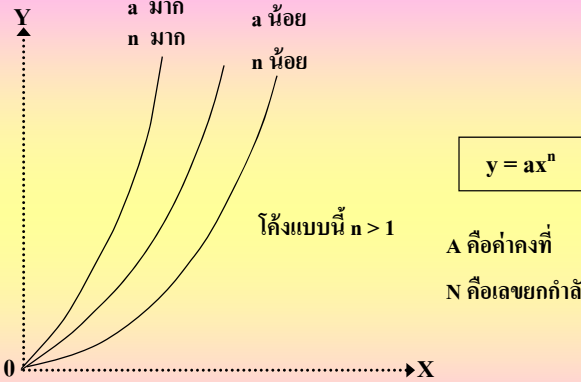
X = ตัวแปรอิสระ

Y = ตัวแปรตาม

เส้นตรงกำหนดโดย
จุดตัดและความชัน

4.6 โมเดลไม่เชิงเส้น (เส้นโค้ง)

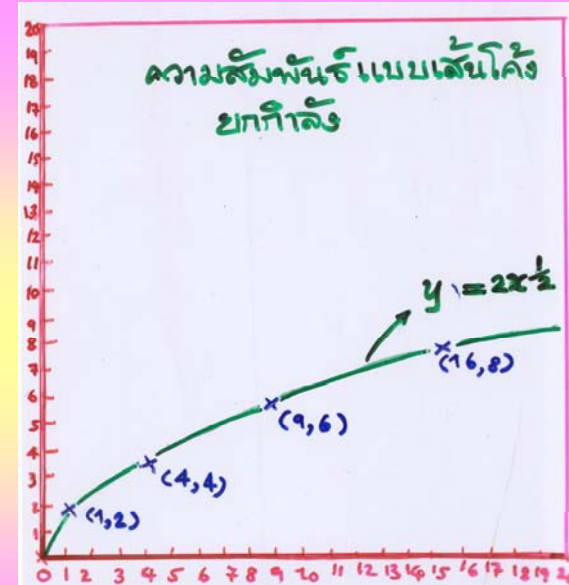
4.6.1 ความสัมพันธ์แบบยกกำลัง (Power Model)



ข้อมูลต่อไปนี้มีความสัมพันธ์แบบเส้นโค้งยกกำลัง

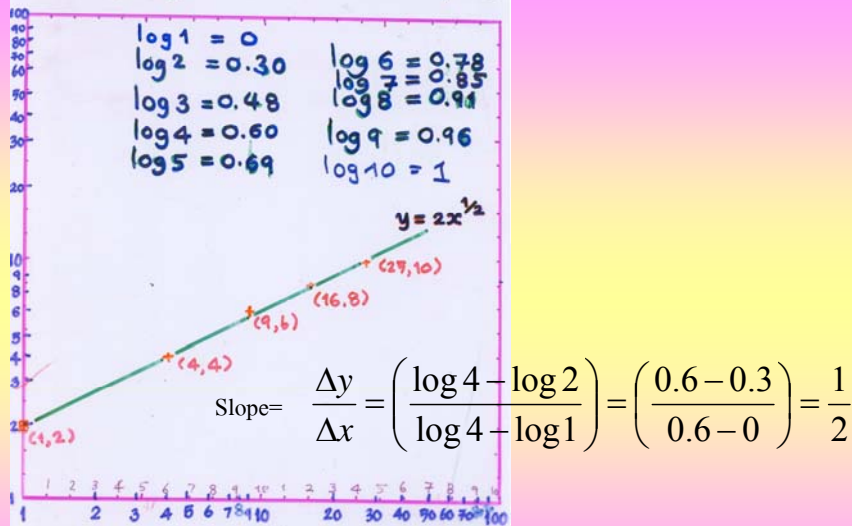
X	1	4	9	16	25	36
Y	2	4	6	8	10	12

25



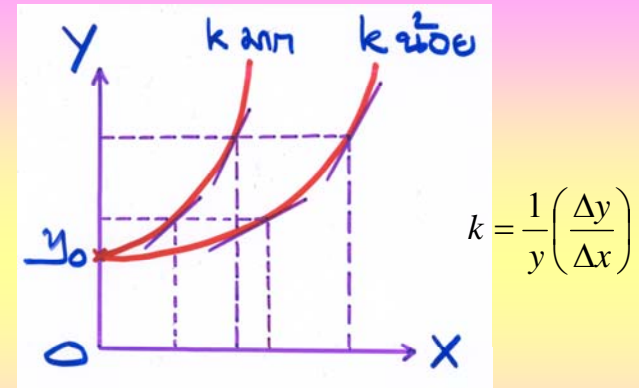
ได้เส้นโค้ง Scale ธรรมดา แต่ได้เส้นตรงใน Scale $\log \times \log$ 26

Log-Log Scale plot 2x2 cycles



เส้นโค้งแบบยกกำลังเมื่อลงจุดใน $\log \times \log$ จะได้เส้นตรง 27

4.6.2 ความสัมพันธ์แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (เพิ่มค่า)

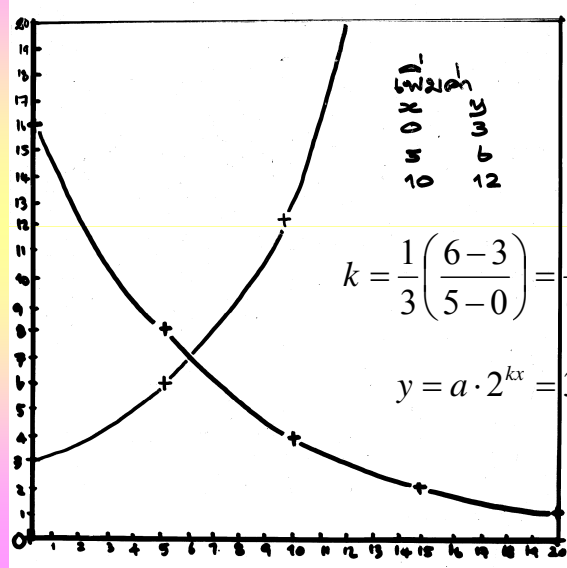


K = ค่าคงที่ของการเพิ่มค่า

1. k ของทุกจุดบนเส้นโค้งเดียวกันต้องมีค่าเท่ากัน
2. k มีค่าเท่ากับความชันต่อจำนวนหรือปริมาณ ณ จุดนั้น

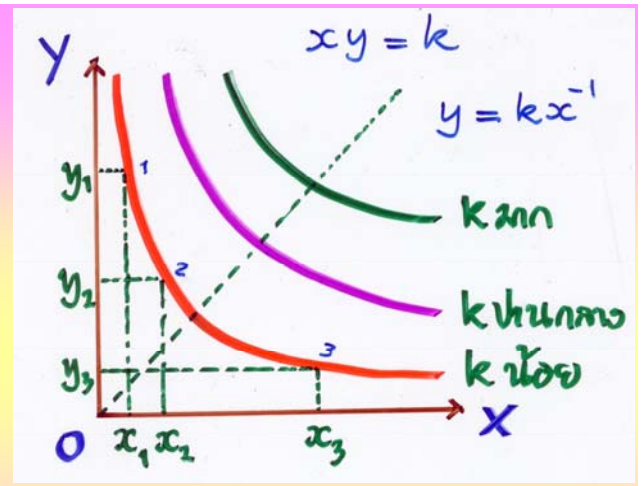
4.6.3 ทุกช่วงของ Δx ที่เท่ากัน

y มีค่าเป็น 2 เท่า (กรณีเพิ่มค่า), x มีค่าเป็นครึ่งหนึ่ง (กรณีลดค่า)



$$k = \frac{1}{3} \left(\frac{6-3}{5-0} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{12-6}{10-5} \right) = \frac{1}{5}$$

$$y = a \cdot 2^{kx} = 3 \cdot 2^{x/5}$$



X มาก y น้อย
 X ปานกลาง y ปานกลาง
 X น้อย y มาก

ผลคูณของ x และ y จะคงที่ได้ค่าคงที่

แบบฝึกหัด 1. จงหาสมการ plot graph จากข้อมูลที่กำหนดให้ พร้อมบอกประเภทกราฟ พร้อมหาค่า c

X	1	8	27	.	.	c
Y	5	10	15	.	.	30

- log 1 = 0
- log 2 = 0.3
- log 3 = 0.48
- log 4 = 0.60
- log 5 = 0.69
- log 6 = 0.78
- log 7 = 0.85
- log 8 = 0.90
- log 9 = 0.96
- log 10 = 1.00

$$\log a \times b = \log a + \log b$$

$$\log a^n = n (\log a)$$

2 จงหาสมการ plot graph จากข้อมูลที่กำหนดให้ พร้อมหาค่า d

X	3	4	6	.	.	d
Y	36	27	18	.	.	2

Questions?

อาจารย์วีระเกษร สวนผกา
Weerakaset Suanpaga
 Department of Civil Engineering
 Faculty of Engineering , Kasetsart University
 Bangkok, Thailand

www.pirun.ku.ac.th/~fengwks/mathcomp

Reference:
 1. วีระศักดิ์ อุดมโชค และคณะ, คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ในชีวิตประจำวัน, หนังสือ, 2549
 2. วีระศักดิ์ อุดมโชค, Lecture note คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ในชีวิตประจำวัน, 2551,
 ภาควิชาวิทยาศาสตร์พื้นฐาน คณะวิทยาศาสตร์ มก.