

วิชา 01999211

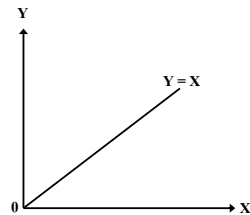
คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ในชีวิตประจำวัน

การจำลองแบบทางคณิตศาสตร์

อาจารย์ธานีทร์ คงศิลา
Tanin.k@ku.ac.th

สมการเส้นตรง (LINEAR EQUATION)

สมการเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด



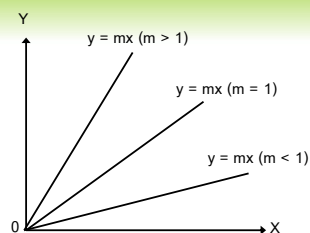
สมการเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด
ทำมุม 45 องศา ทั้งแกน x และ
แกน y

การจำลองแบบทางคณิตศาสตร์

- การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- สมการเชิงเส้น
- อสมการเชิงเส้น
- กำหนดการเชิงเส้น
- แบบจำลองไม่เชิงเส้น

$y = mx$ เมื่อ $m = 1$

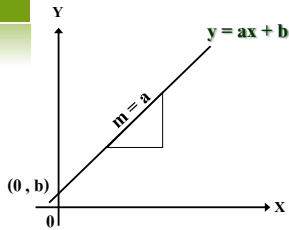
$y = x$ เส้นตรงทำมุม 45° กับแกน x และแกน y



ถ้า $m > 1$ เส้นตรงชันมากกว่า $y = x$
ถ้า $m < 1$ เส้นตรงชันน้อยกว่า $y = x$



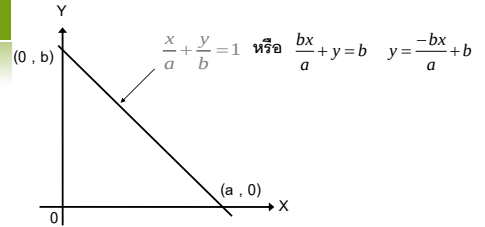
สมการเส้นตรงตัดแกน Y



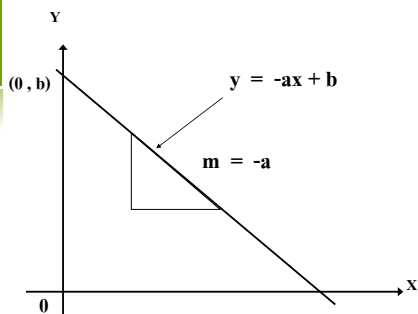
สมการเส้นตรงที่มีความชัน a และจุดตัดแกน y ที่ b



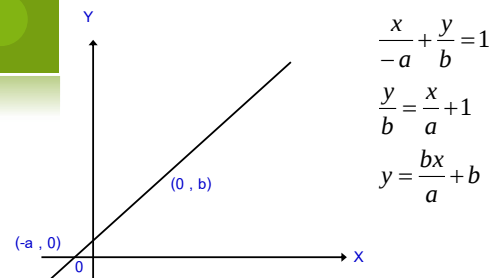
สมการเส้นตรงตัดแกน X และ Y



สมการนี้ มีจุดตัดที่ $(a, 0)$ บนแกน x
 มีจุดตัดบนแกน y ที่ $(0, b)$
 มีความชัน $-b/a$

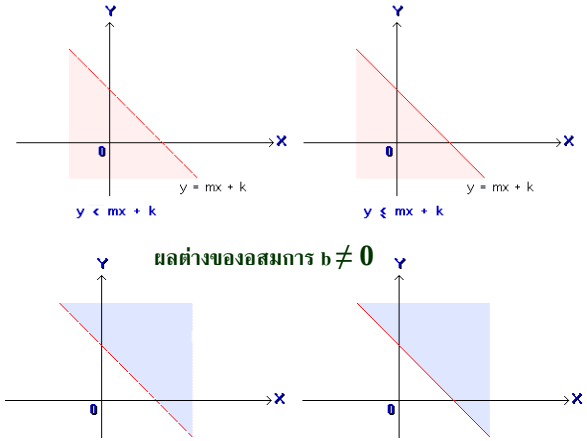
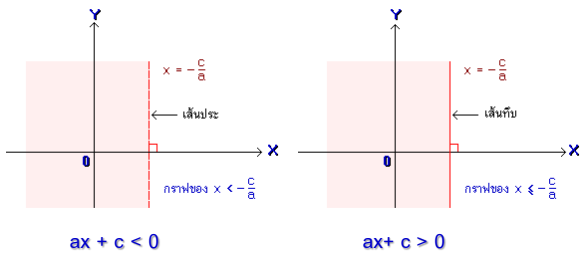


สมการเส้นตรงที่มีความชัน $-a$ และจุดตัดแกน y ที่ b

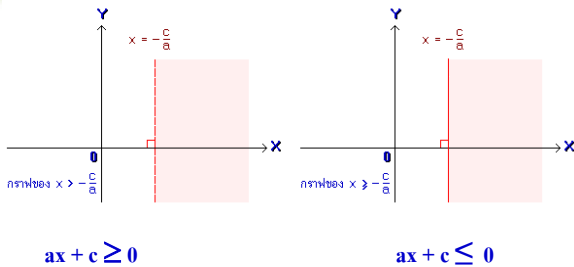


สมการนี้ มีความชัน $= \frac{b}{a}$

อสมการเชิงเส้น



อสมการเชิงเส้น

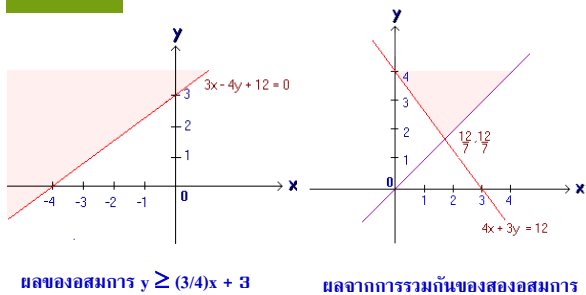


ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟของอสมการ $3x - 4y + 12 \leq 0$
 กราฟของเส้นตรง $3x - 4y + 12 = 0$

$$\begin{aligned} \text{จัดอสมการดังนี้} \quad -4y &\leq -3x - 12 \\ y &\geq \frac{3}{4}x + 3 \end{aligned}$$

ดังนั้นกราฟของ $y \geq \frac{3}{4}x + 3$
 คือครึ่งระนาบของ $3x - 4y + 12 = 0$ รวมถึงเส้นตรงด้วย



กำหนดการเชิงเส้น (LINEAR PROGRAMMING)

ความคิดและวิธีการ

สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีตัวแปรหลายตัว เช่น ปัญหาการผลิตสินค้า ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณสินค้าแต่ละชนิดที่ต้องการผลิต โดยใช้ทรัพยากรที่มีอยู่ได้อย่างเหมาะสม เช่น เครื่องจักร วัตถุดิบ แรงงาน เงินทุน เพื่อให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุด

กำหนดการเชิงเส้น (LINEAR PROGRAMMING)

รูปแบบหรือโมเดลทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการที่ใช้แทนปัญหา และหาทางแก้ปัญหาที่เหมาะสมที่สุด การใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นหนทางและวิธีการที่เหมาะสม และได้ประโยชน์อย่างยิ่ง

กำหนดการเชิงเส้น (LINEAR PROGRAMMING)

ปัญหาของระบบโปรแกรมเชิงเส้น

เช่น ปัญหาการผสมสาร ผสมวัตถุดิบเพื่อให้ได้อาหารสัตว์สูตรต่าง ๆ ปัญหาทางโภชนาการ ที่เลือกบริโภคอาหารให้ได้คุณค่าตามต้องการโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ปัญหาเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากร เพื่อให้ใช้ทรัพยากรอย่างมีประสิทธิภาพ ได้ประโยชน์สูงสุด

กำหนดการเชิงเส้น (LINEAR PROGRAM)

1. เป้าหมายของปัญหา (objective) maximum or minimum
2. หนทางปฏิบัติที่เลือกได้ เลือกทางปฏิบัติที่เหมาะสม
3. เงื่อนไข เลือกตัวแปรที่เหมาะสม
4. ตัวแปร มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

เมื่อจำนวนชั่วโมงที่จะใช้ประโยชน์ได้ตามที่วางแผน
ในการผลิตไว้ของงานแต่ละขั้นตอนใน หนึ่งสัปดาห์กำหนด
ได้ ดังนี้

การเตรียมวัตถุดิบ	420 ชั่วโมง
การขึ้นรูป	300 ชั่วโมง
การตรวจสอบ	240 ชั่วโมง

ในการดำเนินการหนึ่งหน่วยของ

ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 1 ทำกำไรได้ 300 บาท/หน่วย

ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 2 ทำกำไรได้ 200 บาท/หน่วย

บริษัทจะต้องดำเนินการผลิตชนิดที่ 1 และ 2 อย่างไร **จึงจะได้กำไรสูงสุด** และอยู่ภายใต้ทรัพยากร (เวลา) ที่มีจำกัด

การสร้างแบบจำลองของปัญหา

บริษัทผลิตสินค้าแห่งหนึ่งวางแผนการผลิตสินค้า อย่างหนึ่งไว้ด้วยเวลาเป็น
สัปดาห์โดยจะผลิตผลิตภัณฑ์สองชนิดแต่ละชนิด ใช้เวลาในการทำแต่ละขั้นตอนแตกต่างกันไป และขั้นตอนในการผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดจะประกอบด้วย การเตรียมวัตถุดิบ การ
ขึ้นรูป และการตรวจสอบ เวลาที่ใช้ในแต่ละขั้นตอนแต่ละชนิดของผลิตภัณฑ์กำหนดด้วย
ตารางดังต่อไปนี้

ผลิตภัณฑ์ / เวลา	เวลาที่ใช้ต่อหน่วยคิดเป็นชั่วโมง		
	การเตรียมวัตถุดิบ	การขึ้นรูป	การตรวจสอบ
ชนิดที่ 1	6	3	4
ชนิดที่ 2	6	6	2

ผลิตภัณฑ์ / เวลา	เวลาที่ใช้ต่อหน่วยคิดเป็นชั่วโมง		
	การเตรียมวัตถุดิบ	การขึ้นรูป	การตรวจสอบ
ชนิดที่ 1	6	3	4
ชนิดที่ 2	6	6	2

เงื่อนไขบังคับ :

$$6X_1 + 6X_2 \leq 420 \text{ (ข้อจำกัดของการเตรียมวัตถุดิบ)}$$

$$3X_1 + 6X_2 \leq 300 \text{ (ข้อจำกัดของการขึ้นรูป)}$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 240 \text{ (ข้อจำกัดของการตรวจสอบ)}$$

สร้างเป้าหมายโดยกำหนดให้แทนกำไรทั้งหมด จะได้
เป้าหมายของปัญหาในรูป

$$\text{เป้าหมาย : } P = 300 X_1 + 200 X_2 = \text{Max}$$

เป้าหมายต้องการกำไรสูงสุด จึงเรียกว่า การโปรแกรมเชิงเส้นค่าสูงสุด (Linear programming maximum problem)

โปรแกรมค่าต่ำสุด (Linear programming minimum problem)

ในภาคใต้ของประเทศไทยมีเหมืองแร่แห่งหนึ่งที่เหมืองแร่ของบริษัทเอง อยู่สองแห่งโดยที่แต่ละเหมืองจะผลิตแร่ได้ 3 ชนิด คือ ดีบุก ทองแดง และ สังกะสี จำนวนแร่แต่ละชนิดผลิตได้ดังตารางต่อไปนี้

เหมือง / ชนิดแร่	จำนวนผลิตเป็นตันต่อวัน		
	ดีบุก	ทองแดง	สังกะสี
A	6	2	4
B	2	2	12

ให้ เหมือง A ทำงาน X_1 วัน/สัปดาห์
เหมือง B ทำงาน X_2 วัน/สัปดาห์

จากตารางแสดงขีดความสามารถของแต่ละเหมืองเราจะได้ เงินไขบังก

$$6X_1 + 2X_2 \geq 12$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 8$$

$$4X_1 + 12X_2 \geq 24$$

จากต้นทุนการผลิตต่อวันของแต่ละเหมือง เราได้เป้าหมาย

$$C = 40,000X_1 + 32,000X_2 = \text{Min}$$

โปรแกรมค่าต่ำสุด (Linear programming minimum problem)

เหมือง / ชนิดแร่	จำนวนผลิตเป็นตันต่อวัน		
	ดีบุก	ทองแดง	สังกะสี
A	6	2	4
B	2	2	12

บริษัทมีสัญญาจะต้องส่งแร่ให้ลูกค้าในหนึ่ง สัปดาห์ดังนี้
ดีบุก จำนวน 12 ตัน
ทองแดง จำนวน 8 ตัน
สังกะสี จำนวน 24 ตัน

ถ้าต้นทุนการผลิตแร่ต่อวัน
เหมือง A 40,000 บาท
เหมือง B 32,000 บาท
บริษัทจะจัดการผลิตแร่อย่างไรจึงจะมีจำนวน ครบตามสัญญา และ **ต้นทุนการผลิต** **ต่ำสุดด้วย**

การหาคำตอบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

วิธีการ ^{กราฟ} มีวิธีการ

- นำจุดเงื่อนไขบังกไปเขียนกราฟ
- เลือกพื้นที่ให้สมจริงกับเงื่อนไขบังก
- หาจุดยอดและพิกัดของจุดยอดของพื้นที่สมจริงกับจุดเงื่อนไขบังก
- สร้างตารางหาค่าเป้าหมายตามจุดยอด
- เลือกค่าเป้าหมายที่เหมาะสม (optimum)

จากตัวอย่างต่อไปนี้.....

เงื่อนไขบังคับ :

$$6X_1 + 6X_2 \leq 420 \text{ (ข้อจำกัดของการเตรียมวัตถุดิบ)}$$

$$3X_1 + 6X_2 \leq 300 \text{ (ข้อจำกัดของการขึ้นรูป)}$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 240 \text{ (ข้อจำกัดของการตรวจสอบ)}$$

$$\text{เป้าหมาย : } P = 300 X_1 + 200 X_2 = \text{Max}$$

ก่อนที่จะนำสมการไปเขียนกราฟ เราจะต้องหาจุดผ่านของกราฟเสียก่อนโดยจะต้องเปลี่ยน **อสมการเป็น สมการ** แล้วเขียนกราฟ

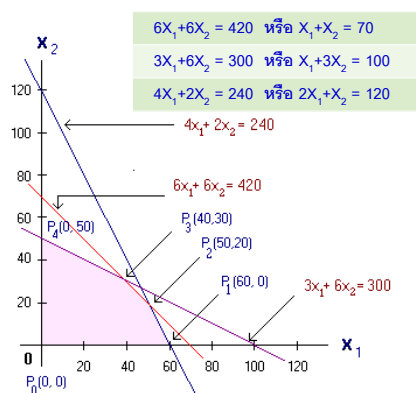
$$6X_1 + 6X_2 = 420 \text{ หรือ } X_1 + X_2 = 70$$

$$3X_1 + 6X_2 = 300 \text{ หรือ } X_1 + 3X_2 = 100$$

$$4X_1 + 2X_2 = 240 \text{ หรือ } 2X_1 + X_2 = 120$$

P_0 , P_1 และ P_4 เป็นจุดตัดแกน

ส่วนจุด P_2 และ P_3 เราต้องแก้สมการคู่ที่ก่อให้เกิดจุดตัดของจุดยอดนั้นๆ



แสดงการเขียนกราฟและเลือกพื้นที่ที่สมจริงกับ อสมการ

สร้างตารางหาค่าเป้าหมายตามจุดยอดจาก

$$P = 300X_1 + 200X_2 \text{ ได้ดังนี้}$$

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
X_1	0	60	50	40	0
X_2	0	0	20	30	50
P	0	18,000	19,000 = Max	18,000	10,000

ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 1 จำนวน 50 หน่วย

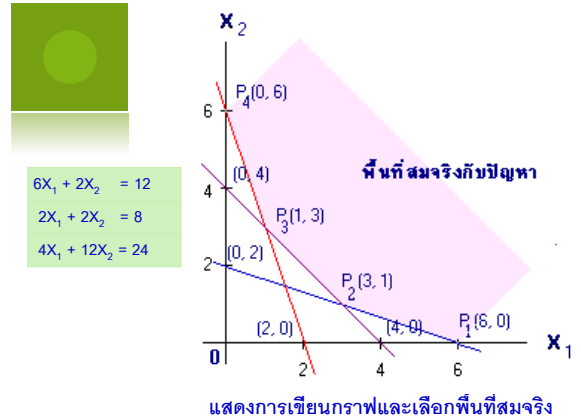
ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 2 จำนวน 20 หน่วย

กำไรสูงสุดเท่ากับ 19,000 บาท

จากตัวอย่าง....

ในภาคใต้ของประเทศไทยมีเหมืองแร่แห่งหนึ่งที่เหมืองแร่ของบริษัทเอง อยู่สองแห่งโดยที่แต่ละเหมืองจะผลิตแร่ได้ 3 ชนิด คือ ดีบุก ทองแดง และ สังกะสี จำนวนแร่แต่ละชนิดผลิตได้ดังตารางต่อไปนี้

เหมือง / ชนิดแร่	จำนวนผลิตเป็นตันต่อวัน		
	ดีบุก	ทองแดง	สังกะสี
A	6	2	4
B	2	2	12



ให้ เหมือง A ทำงาน X_1 วัน/สัปดาห์
เหมือง B ทำงาน X_2 วัน/สัปดาห์

จากตารางแสดงขีดความสามารถของแต่ละเหมืองเราจะได้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 6X_1 + 2X_2 &\geq 12 \\ 2X_1 + 2X_2 &\geq 8 \\ 4X_1 + 12X_2 &\geq 24 \end{aligned}$$

จากต้นทุนการผลิตต่อวันของแต่ละเหมือง เราได้เป้าหมาย

$$C = 40,000X_1 + 32,000X_2 = \text{Min}$$

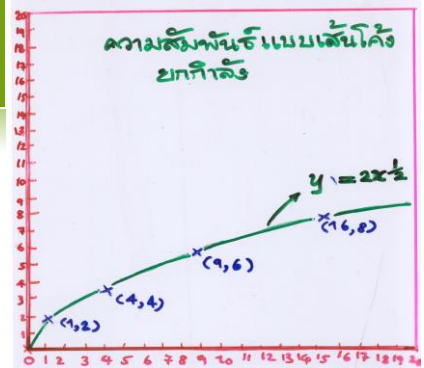
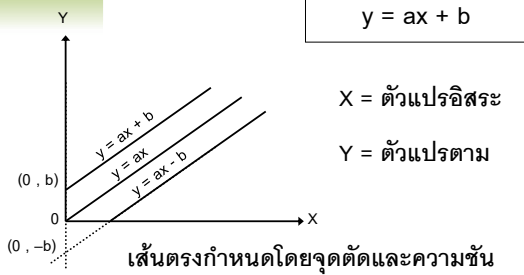
นำจุดยอดไปทดสอบหาค่าต่ำสุดและเป้าหมายของ
อสมการ $C = 40,000X_1 + 32,000X_2$

	P_1	P_2	P_3	P_4
X_1	6	3	1	0
X_2	0	1	3	6
C	240,000	152,000	136,000 = Min	192,000

เหมือง A ทำงาน 1 วัน /สัปดาห์
เหมือง B ทำงาน 3 วัน/ สัปดาห์
ต้นทุนการผลิตต่ำสุดเป็น 136,000 บาท / สัปดาห์

แบบจำลอง (Model) ของความสัมพันธ์ในข้อมูล

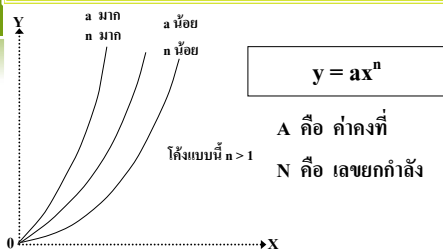
โมเดลเชิงเส้น (เส้นตรง)



ได้เส้นโค้ง Scale ธรรมดา แต่ได้เส้นตรงใน Scale $\log \times \log$

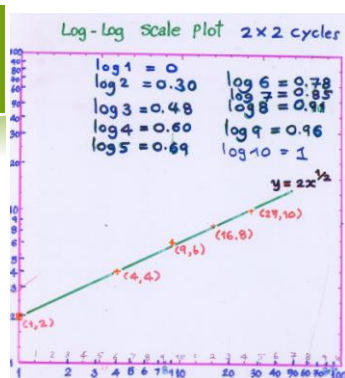
โมเดลไม่เชิงเส้น (เส้นโค้ง)

1. ความสัมพันธ์แบบยกกำลัง (Power Model)



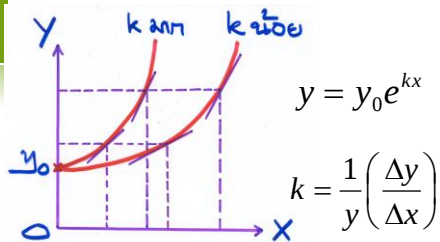
ข้อมูลต่อไปนี้มีความสัมพันธ์แบบเส้นโค้งยกกำลัง

X	1	4	9	16	25	36
Y	2	4	6	8	10	12



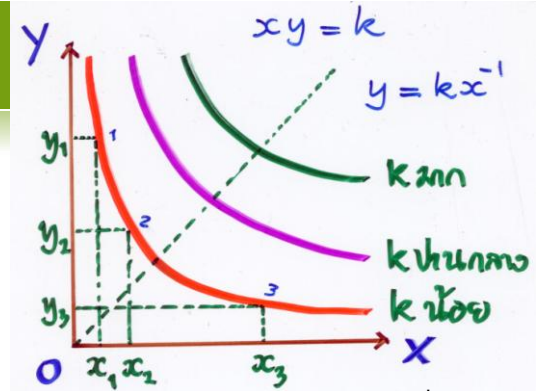
เส้นโค้งแบบยกกำลังเมื่อลงจุดใน $\log \times \log$ จะได้เส้นตรง

ความสัมพันธ์แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (เพิ่มค่า)



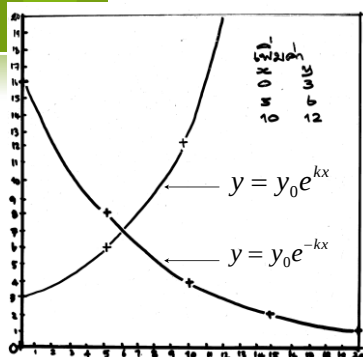
K = ค่าคงที่ของการเพิ่มค่า

1. k ของทุกจุดบนเส้นโค้งเดียวกันต้องมีค่าเท่ากัน
2. k มีค่าเท่ากับความชันต่อจำนวนหรือปริมาณ ณ จุดนั้น



ผลคูณของ x และ y จะคงที่ได้ค่าคงที่

ทุกช่วงของ Δx ที่เท่ากัน



y มีค่าเป็น 2 เท่า
(กรณีเพิ่มค่า)
x มีค่าเป็นครึ่งหนึ่ง
(กรณีลดค่า)

$$k = 0.693/x_{1/2y}$$