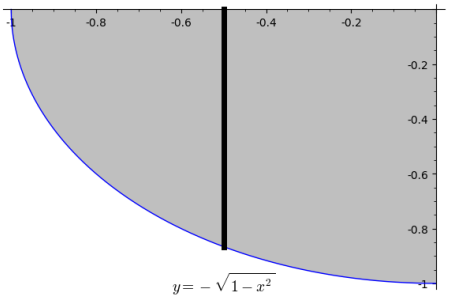
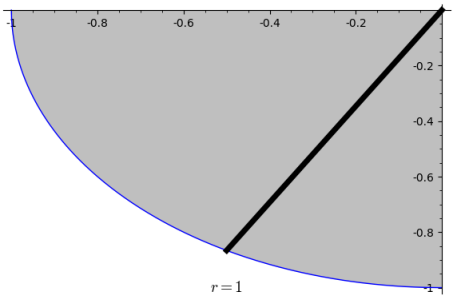
$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\left(\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)dydx$$





จากโจทย์ ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $-1 \le x \le 0$ และ $-\sqrt{1-x^2} \le y \le 0$

จะได้บริเวณ R ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

จะได้ขอบเขต R คือ $0 \le r \le 1\ ,\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

และ $x^2 + y^2 = r^2\ ;\ dydx = rdrd\theta$

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\left(\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)dydx = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{1+\sqrt{r^2}}\right)rdrd\theta$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{1}\frac{2r}{1+r}drd\theta$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{1}2-\frac{2}{1+r}drd\theta$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left[2r-2\ln|1+r|\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(2-2\ln 2-2\ln 1)d\theta$$

$$= [2-2\ln 2]\theta_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= (2-2\ln 2)\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)$$

$$= (2-2\ln 2)\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi(1-\ln 2)$$