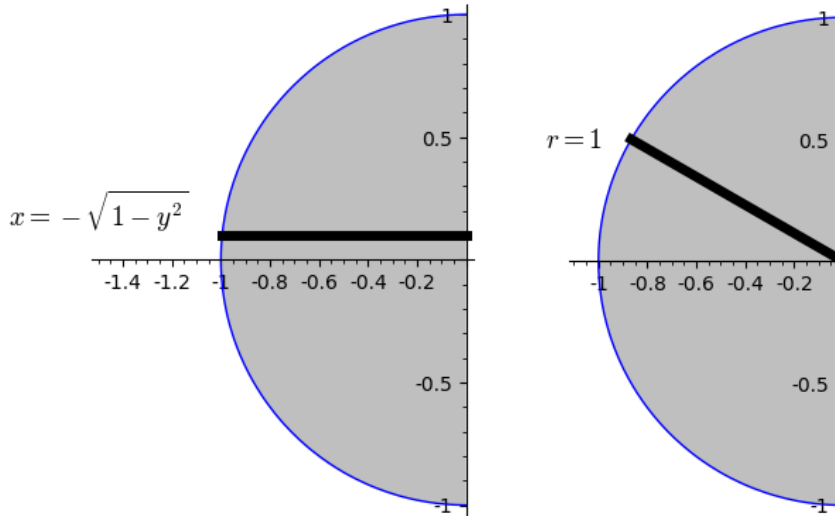


$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \left(\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} \right) dx dy$$



จากโจทย์ ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $-1 \leq y \leq 1$ และ $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 0$

จะได้บริเวณ R ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

จะได้ขอบเขต R คือ

$$0 \leq r \leq 1, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

และ

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad dx dy = r dr d\theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \left(\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} \right) dx dy &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 \left(\frac{4r}{1+r^2} \right) r dr d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 \left(\frac{4r^2}{1+r^2} \right) dr d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 \left(4 - \frac{4}{1+r^2} \right) dr d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} [4r - 4 \arctan r]_0^1 d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (4 - 4 \arctan 1) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(4 - 4\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (4 - \pi) d\theta \\ &= [4 - \pi] \theta \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= (4 - \pi) \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= (4 - \pi)\pi \\ &= 4\pi - \pi^2 \\ &= 4\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$