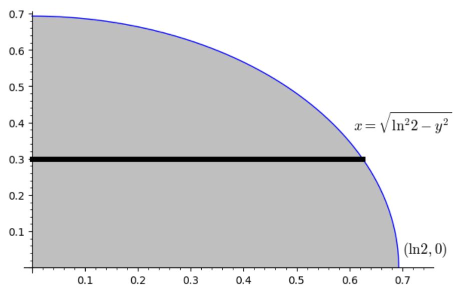
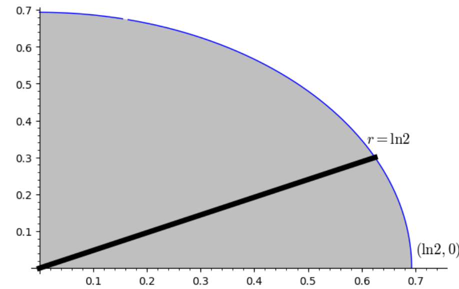
$$\int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$





จากโจทย์ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $0\le x\le\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}$ และ $0\le y\le \ln 2$

จะได้บริเวณR ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$

จะได้ขอบเขตของ R คือ

$$0\le r\le \ln 2\ ,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

และ

$$x^2+y^2=r^2\ ;\ dxdy=rdrd\theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{r^2}}\,rdrd\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\ln 2} e^{r}\,rdrd\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^r(r-1)\right]_0^{\ln 2}d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{\ln 2}(\ln 2-1)+1\right]d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\ln 2-2+1)d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\ln 2-1)d\theta\\
&= \left[2\theta\ln 2-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi}{2}(2\ln 2-1)
\end{aligned}$$