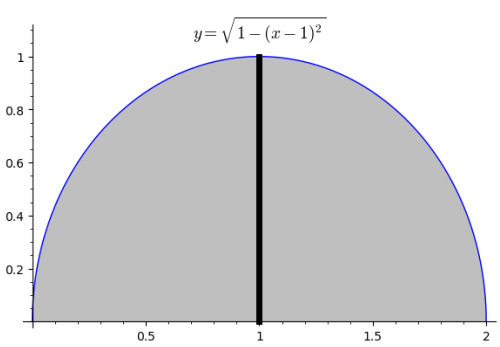
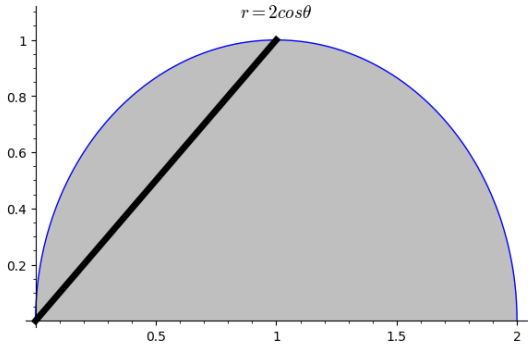
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) dydx$$




จากโจทย์ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $0 \le x \le 2$ และ $0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}$

จะได้บริเวณ R ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

จะได้ขอบเขตของ R คือ $0 \le r \le 2\cos\theta \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

และ $x^2 + y^2 = r^2 \ ; dydx = rdrd\theta$

ดังนั้น

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) dydx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \left(\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}\right) rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta+\sin\theta) drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} [r\cos\theta + r\sin\theta]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + 2\cos\theta\sin\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta + \sin 2\theta) d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\sin 0-\frac{1}{2}\cos 0\right)\\
&= \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&= \frac{\pi}{2}+1
\end{aligned}
$$