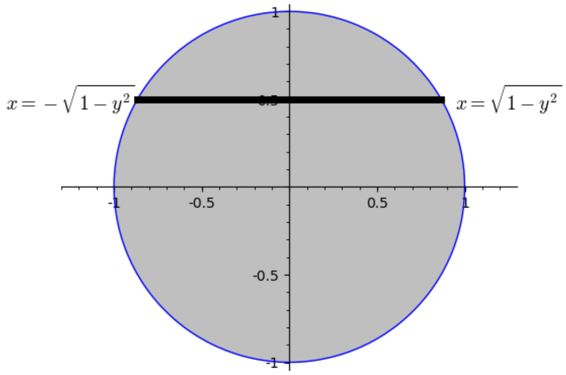
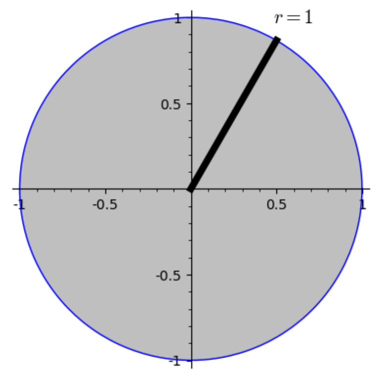
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right)dxdy$$





จากโจทย์ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $-1 \le y \le 1$ และ $-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$

จะได้บริเวณR ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

จะได้ขอบเขตของ R คือ $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

และ $$x^2 + y^2 = r^2 \;;\; dxdy = rdrd\theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln\left(r^2+1\right)r\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right)d\left(r^2+1\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(r^2+1)\ln(r^2+1)-(r^2+1)\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - 2 - \ln 1 + 1\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\ln 2 - \frac{1}{2})d\theta \\
&= \left[(\ln 2 - \frac{1}{2})\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)(2\pi) \\
&= 2\pi\ln 2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$