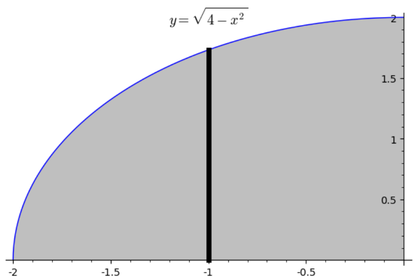
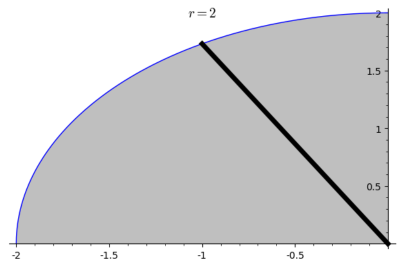
$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}dydx$$





จากโจทย์ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $-2 \le x \le 0$ และ $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$

จะได้บริเวณ R ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

จะได้ขอบเขตของ R คือ $0 \le r \le 2 \; , \; \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

และ $x^2 + y^2 = r^2 \; ; dydx = rdrd\theta$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}dydx &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{2} \frac{2}{\left(1+r^2\right)^2}rdrd\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{2} \frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2}drd\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{2} \frac{1}{\left(1+r^2\right)^2}d\left(1+r^2\right)d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{\left(1+r^2\right)}\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\frac{1}{5}+1\right)d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{4}{5}\right)d\theta \\
&= \left[\frac{4}{5}\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{8\pi}{5}-\frac{6\pi}{5} \\
&= \frac{2\pi}{5}
\end{aligned}$$