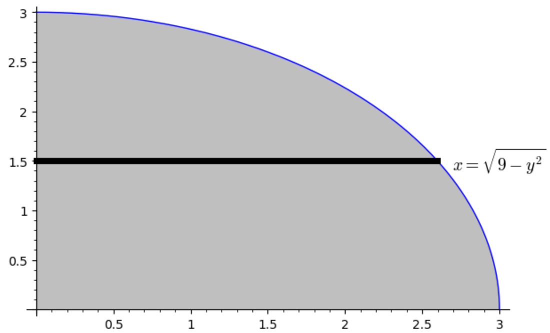
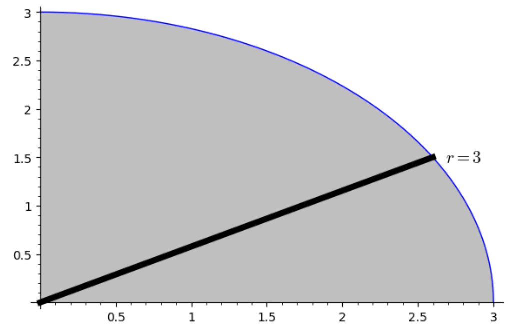
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \cos\left(x^2+y^2\right) dxdy$$





จากโจทย์ขอบเขตของการหาปริพันธ์คือ $0 \le y \le 3$ และ $0 \le x \le \sqrt{9-y^2}$

จะได้บริเวณR ดังรูป

ถ้าเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วโดยแทน $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

จะได้ขอบเขตของ R คือ $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

และ $x^2 + y^2 = r^2$; $dxdy = rdrd\theta$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \cos\left(x^2+y^2\right) dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \cos\left(r^2\right) rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 r\cos\left(r^2\right) drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \frac{1}{2}\cos\left(r^2\right) d\left(r^2\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\sin\left(r^2\right)\right]_0^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\sin 9 - \sin 0\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\sin 9\right) d\theta \\
&= \left[\frac{\theta}{2}\sin 9\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4}\sin 9
\end{aligned}$$