

แบบฝึกหัด

ให้ $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ

๑. $z = x^2 + y^2$, $x = \cos t - \sin t$, $y = \sin t$

๒. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin^2 t$

๓. $z = e^x \sin y$, $x = \sqrt{t}$, $y = \pi t$

๔. $z = xe^y - ye^x$, $x = \ln t$, $y = \ln\left(\frac{1}{t}\right)$

๕. $z = x \cos xy$, $x = 2t^2$, $y = \frac{1}{t}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

ให้ $w = w(x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ เมื่อ

๖. $w = e^{1-xyz}$, $x = t^2$, $y = t^3 + t$, $z = e^{t^2} + 1$

๗. $w = e^{2x+3y} \sin(4z)$, $x = \tan t$, $y = \cos 3t$, $z = 1 + \ln t$

ให้ $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ จงหา z_u , z_v เมื่อ

๘. $z = x^2 + 3xy + y^4$, $x = 2u + 3v$, $y = e^u + v^2$

๙. $z = \sin(x^2 + y^2)$, $x = 2u + 3v$, $y = e^u + v^2$

ให้ $z = z(x, y)$, $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ จงหา z_u , z_v , z_w เมื่อ

๑๐. $z = x^2 + 3x^2y + 4xy^2 + 5y^2$, $x = e^u \cos v + \ln w$, $y = w + e^v \sin u$

๑๑. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $x = \frac{u+w}{v+1}$, $y = \frac{uv}{w+1}$

ให้ $z = z(u, v, w)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ จงหา z_x , z_y เมื่อ

๑๒. $z = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$, $u = x + \sin y$, $v = y + \cos x$, $w = e^x + \ln y$

๑๓. $z = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = e^x \sin y$, $v = e^y \cos x$, $w = e^x \ln y$

๑๔. ถ้า $z = \frac{xy}{x-y}$ จงแสดงว่า $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

๑๕. ถ้า $w = \cos(x-y) + \ln(x+y)$ จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

๑๖. ถ้า $u = u(x, y) = e^x \sin y$ จงแสดงว่า $u_{xx} + u_{yy} = 0$

๑๗. ถ้า $u = u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ จงแสดงว่า $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

๑๘. ถ้า $u = u(x, y)$ โดยที่ $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ และ $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ จงแสดงว่า

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 = \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \right]^2$$

๑๙. ถ้า $u = u(x, y)$ โดยที่ $x = x(r, \theta) = e^r \cos \theta$ และ $y = y(r, \theta) = e^r \sin \theta$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2r} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = y(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

๒๐. $x^2 + y^2 + 3xy + 4 \sin(xy) = 0$

๒๑. $e^{x^2} y + y^2 \ln x + 3x^4 y + \arcsin(x) = 0$

จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อ $z = z(x, y)$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

๒๒. $x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz + 4 \sin(xyz) = e^{x+y+z}$

๒๓. $\ln(x^2 + y^2 + z^2) + 3xz + 4yz = 5e^z$