

แบบฝึกหัดบทประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงสำหรับวิศวกรรมโยธา

ความโก่งของคานเอกรูป (deflection of a uniform beam)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับความโก่ง $y(x)$ ของคานเอกรูป สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่ที่อยู่ในรูป

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x) \quad (1)$$

เมื่อ E เป็น *Young's Modulus* ของความยืดหยุ่นของวัสดุของคาน

I เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อยของภาคตัดขวางของคาน

$w(x)$ เป็นน้ำหนักต่อหน่วยความยาว

โดยกำหนดเงื่อนไขขอบตามลักษณะของคาน ดังนี้

ปลายของคาน	เงื่อนไขขอบ
ปลายยึดหรือตรึง	$y = y' = 0$
ปลายถูกรองรับอย่างง่าย	$y = y'' = 0$
ปลายอิสระ	$y'' = y''' = 0$

ข้อ 1. – ข้อ 5. จงแก้ปัญหาค่าขอบสำหรับสมการความโก่ง (1) เมื่อกำหนดให้ คานเอกรูปมีความยาว L และลักษณะของปลายคานดังที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. ปลายของคานด้านซ้ายถูกตรึง ส่วนปลายด้านขวาถูกปล่อยอิสระ และกำหนด $w(x) = w_0$ เมื่อ w_0 เป็นค่าคงตัว และ $0 < x < L$
2. ปลายของคานทั้งสองข้างถูกรองรับอย่างง่าย และกำหนด $w(x) = w_0$ เมื่อ w_0 เป็นค่าคงตัว และ $0 < x < L$
3. ปลายของคานด้านซ้ายถูกตรึง ส่วนปลายด้านขวาถูกรองรับอย่างง่าย และกำหนด $w(x) = w_0$ เมื่อ w_0 เป็นค่าคงตัว และ $0 < x < L$
4. ปลายของคานด้านซ้ายถูกตรึง ส่วนปลายด้านขวาถูกรองรับอย่างง่าย และกำหนด $w(x) = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ เมื่อ w_0 เป็นค่าคงตัว และ $0 < x < L$
5. ปลายของคานทั้งสองข้างถูกรองรับอย่างง่าย และกำหนด $w(x) = w_0 x$ เมื่อ w_0 เป็นค่าคงตัว และ $0 < x < L$

ข้อ 6. คานยื่นความยาว L ปลายด้านขวาถูกตรึง ส่วนปลายด้านซ้ายถูกปล่อยอิสระ ถ้ามีแรงยึดในแนวนอนขนาด P ปอนต์มากระทำกับปลายด้านซ้าย แล้วความโก่ง $y(x)$ ของคาน สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่อยู่ในรูป

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Py - w(x) \frac{x}{2}$$

จงหาความโก่ง $y(x)$ ของคานยื่น ถ้า $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$ เมื่อ w_0 เป็นค่าคงตัว และ $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$