The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017)
Department of Mathematics, Faculty of Science
Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

การปรับปรุงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์

An improvement of a numerical method for solving Burgers' equation

สุปรียา ไพรัตน์[‡] นุชนันทร์ เอื้อวงศาโรจน์ และ ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักร์[†]
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ ศรีราชา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตศรีราชา ชลบุรี 20230

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ มีเป้าหมายเพื่อศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์จากการลดรูปเป็นสมการความร้อน โดยประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่ 6 ประมาณค่าอนุพันธ์ในเชิงพื้นที่ และประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแมคคอร์แมคสำหรับประมาณค่าอนุพันธ์ในเวลา ซึ่งในการศึกษานี้ เราได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการคำนวณและความแม่นยำของผลเฉลยเชิงตัวเลข ทั้งกับงานวิจัยอื่นและผลเฉลยแม่นตรง

คำสำคัญ: สมการเบอร์เกอร์, สมการความร้อน, วิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับ, ระเบียบวิธีแมคคอร์แมค
2010 MSC: 65L12.

1 บทนำ

สมการเบอร์เกอร์ (Burgers' equation) เป็นสมการเชิงสมการย่อยที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานทางด้านฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น การจำลองแบบในเรื่องพลศาสตร์ของแก๊ส กลศาสตร์ของไหล และงานที่เกี่ยวกับกระแสจราจรในด้านเครือข่ายคอมพิวเตอร์ เป็นต้น ในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมา นักวิจัยได้ให้ความสนใจศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ด้วยวิธีการที่แตกต่างกันหลากหลายรูปแบบ ทั้งระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (finite difference methods) และระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (finite element methods) อาทิเช่น วิธีผลต่างอันตะชี้กำลังแบบชัดแจ้ง (explicit exponential finite difference) วิธีสมาชิกจำกัดพหุนามเสมือนจริงรูปร่างระฆังกำลังสองน้อยสุด (least-squares quadratic B-spline finite element method) [1,8] รวมทั้งมีการศึกษาประสิทธิภาพของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ [9] และสำหรับในงานวิจัยนี้ เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ชนิดหนึ่งมิติ ซึ่งจะอยู่ในรูป

[†]ผู้แต่งหลัก
[‡]ผู้พูด
อีเมล: supreeya.pairat@gmail.com, fresh_doraemon18@hotmail.com, srcnrk@ku.ac.th

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ;\ a<x<b \tag{1-1}$$

มีเงื่อนไขขอบ คือ

$u(a,t)=f_1(t)$ และ $u(b,t)=f_2(t)$ สำหรับ $0<t\le T$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$u(x,0)=g(x), \quad a<x<b$

ในการหาผลเฉลยของสมการที่ (1-1) P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] ได้ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับ (compact finite difference method) และระเบียบวิธีแมคคอร์แมค (MacCormack method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ พบว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีความแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง แต่เนื่องจากสมการเบอร์เกอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดไม่เชิงเส้น ทำให้การหาผลเฉลยมีความยุ่งยากและซับซ้อน ต่อมา R.C. Sarker และ L.S. Andallah [5] ได้นำวิธีการแปลงฮอพฟ์-โคล (Hopf-Cole transformation) มาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ โดยการลดรูปเป็นสมการความร้อนซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดเชิงเส้น และใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้งและระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยายในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อลดความซับซ้อนในการคำนวณ อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าในการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีดังกล่าวง่ายต่อการคำนวณ แต่ผลเฉลยยังมีค่าความคลาดเคลื่อนค่อนข้างสูง ดังนั้น ในการศึกษานี้ จึงมีเป้าหมายในการปรับปรุงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณและเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลย

2 ความรู้พื้นฐาน

ความรู้พื้นฐานที่สำคัญซึ่งเรานำมาประยุกต์ใช้ในการปรับปรุงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ ประกอบด้วย การแปลงฮอพฟ์-โคล ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับ และระเบียบวิธีแมคคอร์แมค โดยมีรายละเอียดดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

2.1 การแปลงฮอพฟ์-โคล (Hopf-Cole transformation)

การแปลงฮอพฟ์-โคล เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับแปลงสมการเบอร์เกอร์เพื่อให้ลดรูปเป็นสมการความร้อนที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดเชิงเส้น ซึ่งเกิดจากการศึกษาอย่างอิสระของ E. Hopf [2] และ J.D. Cole [3] ในปี 1950 และ 1951 ตามลำดับ โดยในเวลาต่อมาวิธีการนี้จึงถูกเรียกรวมกันว่า การแปลงฮอพฟ์-โคล รายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $\phi(x,t)$ เป็นผลเฉลยใดๆ ของสมการความร้อน

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

(2-1)

แล้วการแปลงฮอพฟ์-โคล $u(x,t) = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}$ (2-2)

เป็นผลเฉลยของสมการที่ (1-1)

2.2 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับ (Compact finite difference method)

ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับถูกนำมาประยุกต์ใช้สำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอนุพันธ์อันดับที่สองในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งได้รับจากการศึกษาของ S.K. Lele [7] มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง มีรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c\frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad (2\text{-}3)$$

โดยสูตรผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่สี่สำหรับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^4)$ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 0, \quad c = 0$$

และสูตรผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หกสำหรับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^6)$ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{14}{9}, \quad b = \frac{1}{9}, \quad c = 0$$

อนุพันธ์อันดับที่สอง มีรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$\beta f''_{i-2} + \alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} + \beta f''_{i+2} = c\frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9h^2} + b\frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-3}}{4h^2} + a\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \qquad (2\text{-}4)$$

โดยสูตรผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่สี่สำหรับอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^4)$ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\beta = 0, \quad c = 0, \quad \alpha = \frac{1}{10}, \quad a = \frac{6}{5}, \quad b = 0$$

และสูตรผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หกสำหรับอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^6)$ กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\alpha = \frac{2}{11}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{12}{11}, \quad b = \frac{3}{11}, \quad c = 0$$

2.3 ระเบียบวิธีแมคคอร์แมค (MacCormack method)

ระเบียบวิธีแมคคอร์แมค ได้รับจากการศึกษาของ R.W. MacCormack [6] ซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขชนิดตัวทำนาย-ตัวแก้ อีกรูปแบบหนึ่งที่ใช้สำหรับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยหลักการคำนวณของระเบียบวิธีแมคคอร์แมคในขั้นแรกจะเป็นขั้นตอนของการทำนายค่าผลเฉลย เรียกว่า ขั้นทำนาย และในขั้นที่สองจะเป็นขั้นตอนการนำค่าผลเฉลยที่ได้รับจากขั้นแรกมาปรับปรุงผลเฉลยให้มีค่าความแม่นยำสูงขึ้น ซึ่งเรียกว่า ขั้นแก้ไข สำหรับการนำมาประยุกต์ใช้กับสมการเบอร์เกอร์นั้น จากสมการที่ (1-1) สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial f(u)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

เมื่อ $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ และสามารถเขียนสูตรตัวทำนาย-ตัวแก้ตามระเบียบวิธีแมคคอร์แมค ได้ดังนี้

ขั้นทำนาย

$$\overline{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h}(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{\nu\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{2-5}$$

ขั้นแก้ไข

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_j^n + \overline{u}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{h}(\overline{f}_{j+1} - \overline{f}_j) + \frac{\nu\Delta t}{h^2}(\overline{u}_{j-1}^{n+1} - 2\overline{u}_j^{n+1} + \overline{u}_{j-1}^{n+1})\right] \tag{2-6}$$

ในเวลาต่อมา P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] ได้นำมาประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่สี่ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ มีรูปแบบตัวทำนาย-ตัวแก้ ดังนี้

ขั้นทำนาย

$$\overline{u}_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t f_j' + \nu\Delta t u_j'' \tag{2-7}$$

ขั้นแก้ไข

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_j^n + \overline{u}_j^{n+1} - \Delta t\overline{f}_j' + \nu\Delta t\overline{u}_j''\right] \tag{2-8}$$

3. วิธีดำเนินการวิจัย

ในการปรับปรุงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์นี้ เราแบ่งการทำงานออกเป็น 4 ขั้นตอนหลัก ประกอบด้วย ขั้นตอนการลดรูปสมการเบอร์เกอร์เป็นสมการความร้อน ขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลข ขั้นตอนการประมาณค่าย้อนกลับ และขั้นตอนการเปรียบเทียบค่าความแม่นยำ สำหรับในการประมวลผลและการทดสอบประสิทธิภาพในการคำนวณนั้น เราใช้โปรแกรม MATLAB (Academic License No. 1115471) เวอร์ชั่น R2015b+ ซึ่งแสดงรายละเอียดในแต่ละขั้นตอน ดังนี้

3.1 ขั้นตอนการลดรูปสมการเบอร์เกอร์เป็นสมการความร้อนโดยใช้การแปลงฮอพฟ์-โคล

โดยการแปลงฮอพฟ์-โคล [2,3] เรากำหนดให้ $u = \psi_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

ซึ่งจากสมการที่ (1-1) จะได้ว่า $\psi_{xt} + \psi_x\psi_{xx} = \nu\psi_{xxx}$ หรือ $\psi_{xt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\psi_x^{\,2}\right) = \nu\psi_{xxx}$

หาปริพันธ์ทั้ง 2 ข้างเทียบ x จะได้

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^{\,2} = \nu\psi_{xx} \tag{3-1}$$

จากทฤษฎีบทที่ 1 $u(x,t)$ เป็นผลเฉลยของสมการที่ (1-1) ซึ่งอยู่ในรูป $u(x,t) = -2\nu\frac{\phi_x}{\phi}$ (3-2)

ดังนั้น $u = \psi_x = -2\nu\frac{\phi_x}{\phi}$

โดยวิธีการแก้สมการตัวแปรแยกกันได้ จะได้ว่า $\psi = -2\nu\ln\phi$

และเมื่อแทน $\psi = -2\nu\ln\phi$ ในสมการที่ (3-1) จะได้

$$\phi_t = \nu\phi_{xx} \tag{3-3}$$

ซึ่งเป็นสมการความร้อน

จากสมการที่ (3-2) จะได้ว่า $\frac{\phi_x}{\phi} = \frac{-u(x,t)}{2\nu}$

โดยวิธีการแก้สมการตัวแปรแยกกันได้และจากได้เงื่อนไขเริ่มต้นของสมการที่ (1-1) สำหรับ $t = 0$ จะได้ว่า

$$\phi(x,0) = ce^{-\frac{1}{2\nu}\int u_0(x)dx} \tag{3-4}$$

จากสมการที่ (3-2) เห็นได้อย่างชัดเจนว่า c ไม่มีผลกระทบต่อผลเฉลยของสมการที่ (1-1) และเพื่อความสะดวก เราจะกำหนดให้ขีดจำกัดล่างของการหาปริพันธ์เป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีผลกระทบต่อผลเฉลยของสมการที่ (1-1) ดังนั้น จะได้เงื่อนไขเริ่มต้นของสมการที่ (3-3) ดังนี้

$$\phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x g(z)\,\mathrm{d}z} = \phi_0(x)$$

และจากเงื่อนไขขอบของสมการที่ (1-1) นั่นคือ $u(a,t) = f_1$, $u(b,t) = f_2$ จะได้เงื่อนไขขอบของสมการที่ (3-3) ดังนี้

$$\frac{\phi_x(a,t)}{\phi} = f_1 \quad , \quad \frac{\phi_x(b,t)}{\phi} = f_2$$

หรือ $$\phi_x(a,t) = f_1\phi_a \quad , \quad \phi_x(b,t) = f_2\phi_b \tag{3-5}$$

3.2 ขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลข

ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการความร้อน (3-3) เราแบ่งช่วง $a \le x \le b$ ออกเป็น N ช่วงย่อย โดยกำหนดให้ความยาวของแต่ละช่วงย่อยมีขนาดเท่ากันและมีค่าเท่ากับ h ดังนั้น จะได้ว่า $h = \dfrac{b-a}{N}$ และกำหนดให้ $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0,1,2,\ldots,N$ ซึ่งจะได้ว่า $x_0 = a$ และ $x_N = b$ สำหรับในการแบ่งช่วงเวลา $0 \le t \le T$ นั้น เราแบ่งออกเป็น M ช่วงย่อย โดยกำหนดให้แต่ละช่วงย่อยมีขนาดเท่ากับ dt เมื่อ $dt = \dfrac{T}{M}$ และ $t_j = jdt$ สำหรับ $j = 0,1,2,\ldots,M$

การประมาณค่าเงื่อนไขขอบในสมการที่ (3-5) เราใช้วิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หก ซึ่งสำหรับ $\phi_x(a,t) = f_1\phi_a$ จะได้ว่า

$$\phi\left(x_0\right) = \frac{120}{20f_1+49}\phi\left(x_1\right) - \frac{300}{40f_1+98}\phi\left(x_2\right) + \frac{400}{60f_1+147}\phi\left(x_3\right) - \frac{300}{80f_1+196}\phi\left(x_4\right)$$

$$+\frac{120}{100f_1+245}\phi\left(x_5\right) - \frac{20}{120f_1+294}\phi\left(x_6\right)$$

และสำหรับ $\phi_x(b,t) = f_2\phi_b$ จะได้

$$\phi\left(x_N\right) = -\frac{120}{20f_2-49}\phi\left(x_{N-1}\right) + \frac{300}{40f_2-98}\phi\left(x_{N-2}\right) - \frac{400}{60f_2-147}\phi\left(x_{N-3}\right)$$

$$+\frac{300}{80f_2-196}\phi\left(x_{N-4}\right) - \frac{120}{100f_2-245}\phi\left(x_{N-5}\right) + \frac{20}{120f_2-294}\phi\left(x_{N-6}\right)$$

เนื่องจาก เราจะหาผลเฉลยของสมการความร้อน (3-3) ซึ่งมีพจน์อนุพันธ์ในเชิงพื้นที่เพียงตัวเดียว คือ อนุพันธ์อันดับที่สองของ ϕ เทียบกับ x ดังนั้น เราจะใช้วิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับในการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่สอง ϕ_{xx} และเพื่อความสะดวกจะเขียนแทน ϕ_{xx} ด้วย ϕ''

สำหรับที่ $i = 1$ และ $i = N-1$ เราจะใช้วิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่สี่ ดังนี้
ที่ $i = 1$ จะได้ว่า

$$14\phi_1'' - 5\phi_2'' + 4\phi_3'' - \phi_4'' = \frac{12}{h^2}\left[\phi_0 - 2\phi_1 + \phi_2\right]$$

ที่ $i = N-1$ จะได้ว่า

$$-\phi_{N-4}'' + 4\phi_{N-3}'' - 5\phi_{N-2}'' + 14\phi_{N-1}'' = \frac{12}{h^2}\left[\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N\right]$$

และสำหรับที่ $i = 2$ ถึง $i = N-2$ จะใช้วิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หก จะได้ว่า

$$\frac{2}{11}\phi_{i-1}'' + \phi_i'' + \frac{2}{11}\phi_{i+1}'' = \frac{3}{11}\left[\frac{\phi_{i+2} - 2\phi_i + \phi_{i-2}}{4h^2}\right] + \frac{12}{11}\left[\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2}\right]$$

หรือ $$2\phi_{i-1}'' + 11\phi_i'' + 2\phi_{i+1}'' = 3\left[\frac{\phi_{i+2} - 2\phi_i + \phi_{i-2}}{4h^2}\right] + 12\left[\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2}\right]$$

สำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์ในเวลา ϕ_t เราจะใช้ระเบียบวิธีแมคคอร์แมค ซึ่งเป็นระเบียบวิธีตัวทำนาย-ตัวแก้ ดังนี้

ขั้นทำนาย $\overline{\phi}_i^{j+1} = \phi_i^j + \nu\Delta t\phi_i'',$

ขั้นแก้ไข $\phi_i^{j+1} = \frac{1}{2}\left[\phi_i^j + \overline{\phi}_i^{j+1} + \nu\Delta t\overline{\phi}_i''\right]$

3.3 ขั้นตอนการประมาณค่าย้อนกลับ

จากขั้นตอนที่ 3.2 จะได้ผลเฉลยของสมการความร้อนแล้วเราจะทำการแทนค่าย้อนกลับ เพื่อหา u_i^j จากความสัมพันธ์ $u_i^j = -2\nu\frac{\phi_i'^j}{\phi_i^j}$ โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หก ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$A_1\phi' = M_1\phi + H_1$$

เมื่อ

$$M_1 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{14}{6} & 0 & \frac{14}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{14}{6} & 0 & \frac{14}{6} & \frac{1}{12} & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{1}{12} & -\frac{14}{6} & 0 & \frac{14}{6} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{1}{4} & \frac{4}{3} & -6 & 4 \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} \quad \text{และ} \quad H_1 = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -\frac{11}{12}u_0 \\ -\frac{1}{12}u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{12}u_N \\ \frac{11}{12}u_N \end{pmatrix}_{(N-1)\times 1}$$

3.4 ขั้นตอนการเปรียบเทียบความแม่นยำ

จากการประมวลผลจะได้ผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ จากนั้นนำผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ที่ได้ไปเปรียบเทียบค่าความแม่นยำกับผลเฉลยแม่นตรง พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ที่ได้รับจากการศึกษาของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] และ R.C. Sarker และ L.S. Andallah [5]

4 ผลการศึกษา

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ (1-1) เราพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบจากกรณีศึกษาของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] ดังนี้

เงื่อนไขขอบ $\quad u(0,t) = 0 = u(1,t) \quad$ สำหรับ $\; t > 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $\quad u(x,0) = \dfrac{2\nu\pi\sin(\pi x)}{a + \cos(\pi x)}$

ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรง คือ $\quad u(x,t) = \dfrac{2\nu\pi e^{-\pi^2\nu t}\sin(\pi x)}{a + e^{-\pi^2\nu t}\cos(\pi x)} \quad$ สำหรับ $\; a > 1$

โดยในการศึกษานี้ เราจะพิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $T = 0.1$ $a = 2$ และ $\nu = 0.01$ เมื่อกำหนดให้ $\Delta t = 0.0001$ และเปรียบเทียบค่าความแม่นยำกับผลเฉลยแม่นตรง พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ที่ได้รับจากการศึกษาของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] และ R.C. Sarker และ L.S. Andallah [5] ซึ่งแสดงผลในตารางที่ 1 ถึง 3 และเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการประมวลผลการคำนวณดังกราฟในรูปที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขระหว่างวิธีที่นำเสนอกับระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้งซึ่งได้จากการศึกษาของ R.C. Sarker และ L.S. Andallah [5] สำหรับ $T = 0.1$ $a = 2$ และ $\nu = 0.01$ $\Delta t = 0.0001$ และกำหนด $N = 100$

x	**วิธีที่นำเสนอ**	**วิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้ง [5]**	**ค่าแม่นตรง**
0.1	0.006535454	0.006577898	0.006535445
0.2	0.013055335	0.013144537	0.013055335
0.3	0.019493636	0.019638487	0.019493636
0.4	0.025659249	0.025873442	0.025659249
0.5	0.031107389	0.031407969	0.031107389
0.6	0.034928657	0.035328881	0.034928657
0.7	0.035495951	0.035984105	0.035495951
0.8	0.030501345	0.030999649	0.030501345

ตารางที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขระหว่างวิธีที่นำเสนอกับระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยายซึ่งได้จากการศึกษาของ R.C. Sarker และ L.S. Andallah [5] สำหรับ $T = 0.1$ $a = 2$ และ $\nu = 0.01$ $\Delta t = 0.0001$ และกำหนด $N = 100$

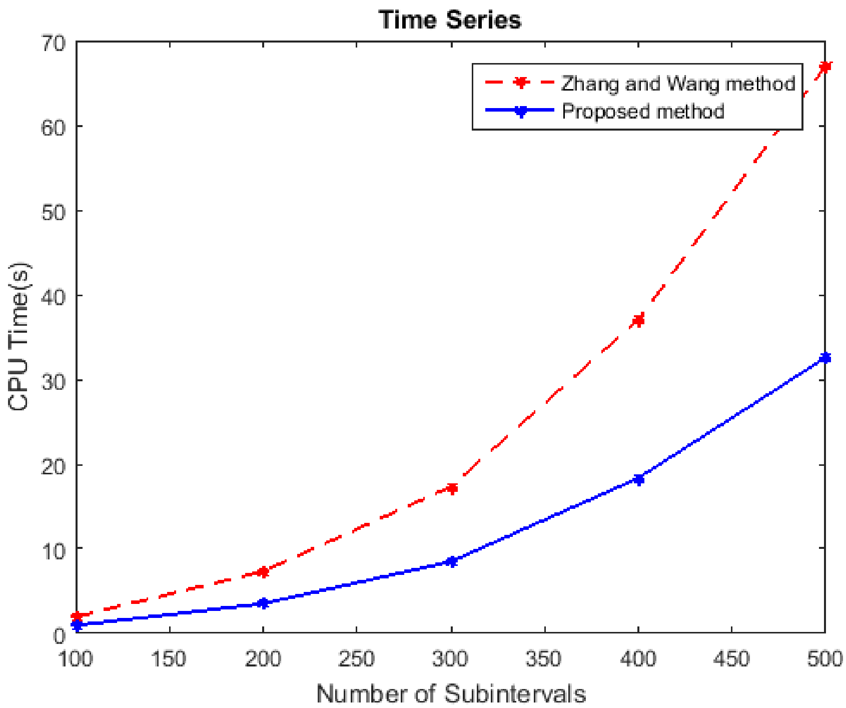
x	**วิธีที่นำเสนอ**	**วิธีผลต่างอันตะแบบโดยปริยาย[5]**	**ค่าแม่นตรง**
0.1	0.006535454	0.006522441	0.006535445
0.2	0.013055335	0.013053279	0.013055335
0.3	0.019493636	0.019490591	0.019493636
0.4	0.025659249	0.025655267	0.025659249
0.5	0.031107389	0.031102606	0.031107389
0.6	0.034928657	0.034923354	0.034928657

0.7	0.035495951	0.035490651	0.035495951
0.8	0.030501345	0.030524038	0.030501345
0.9	0.018166629	0.048331762	0.018166604

ตารางที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขระหว่างวิธีที่นำเสนอกับระเบียบวิธีของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] สำหรับ $T = 0.1$ $a = 2$ และ $\nu = 0.01$ $\Delta t = 0.0001$ และกำหนด $N = 100$

x	**วิธีที่นำเสนอ**	**วิธีของ R.C. Sarker P.G. Zhang และ J.P. Wang [4]**	**ค่าแม่นตรง**
0.1	0.006535454	0.006535445	0.006535445
0.2	0.013055335	0.013055335	0.013055335
0.3	0.019493636	0.019493636	0.019493636
0.4	0.025659249	0.025659249	0.025659249
0.5	0.031107389	0.031107389	0.031107389
0.6	0.034928657	0.034928657	0.034928657
0.7	0.035495951	0.035495951	0.035495951
0.8	0.030501345	0.030501345	0.030501345
0.9	0.018166629	0.018166604	0.018166604

รูปที่ 1 แสดงกราฟการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการคำนวณระหว่างวิธีที่นำเสนอกับระเบียบวิธีของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] สำหรับ $T = 0.1$ $a = 2$ และ $\nu = 0.01$ $\Delta t = 0.0001$ และกำหนด $N = 100$



5. บทสรุป

ในงานวิจัยนี้ เราได้ศึกษาการแปลงสมการเบอร์เกอร์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดไม่เชิงเส้นให้ลดรูปเป็นสมการความร้อนซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดเชิงเส้นโดยใช้การแปลงฮอพฟ์-โคล แล้วใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หก ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^6)$ สำหรับการประมาณอนุพันธ์อันดับที่สองในเชิงพื้นที่ และใช้ระเบียบวิธีแมคคอร์แมคสำหรับการประมาณอนุพันธ์ในเวลา แล้วจึงประมาณค่าย้อนกลับ ทั้งนี้เพื่อลดความซับซ้อนและประหยัดเวลาในการคำนวณ จากผลการศึกษาพบว่า วิธีที่เรานำเสนอนี้มีความแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ R.C. Sarker และ L.S. Andallah [5] ซึ่งได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้งและระเบียบวิธีผลต่างอันตะแบบปริยาย ที่มีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^2)$ ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์จากสมการความร้อน พบว่า วิธีที่เรานำเสนอนี้มีความแม่นยำสูงกว่ามาก และเมื่อเปรียบเทียบวิธีที่เรานำเสนอกับผลการศึกษาของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] ซึ่งได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่สี่ ที่มีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $O(h^4)$ กับสมการเบอร์เกอร์โดยตรง พบว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีความแม่นยำสูงทั้งสองวิธี แต่วิธีที่เรานำเสนอใช้เวลาในการประมวลผลการคำนวณน้อยกว่าประมาณครึ่งเท่าหรือประมาณร้อยละ 50 ของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลการคำนวณตามระเบียบวิธีของ P.G. Zhang และ J.P. Wang [4] ทั้งนี้ เป็นผลมาจากวิธีที่นำเสนอไม่มีการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งในเชิงพื้นที่สำหรับทุกรอบเวลาการคำนวณ และในการประมาณค่าย้อนกลับก็มีการดำเนินการเพียงหนึ่งรอบการคำนวณเท่านั้นหลังจากที่ได้ผลเฉลยของสมการความร้อนเรียบร้อยแล้ว

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์จากวิธีการแปลงจากสมการเบอร์เกอร์เป็นสมการความร้อน โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หกสำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองในเชิงพื้นที่ และใช้ระเบียบวิธีแมคคอร์แมคสำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์ในเวลา แล้วจึงประมาณค่าย้อนกลับนั้น จะทำให้ได้ผลเฉลยที่แม่นยำสูงและลดต้นทุนในการคำนวณ กล่าวคือ การปรับปรุงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขตามระเบียบวิธีที่เรานำเสนอนี้เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและทำให้ได้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำสูง

กิตติกรรมประกาศ ผู้เขียนขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ ศรีราชา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตศรีราชา ที่ให้การสนับสนุนงบประมาณในการจัดซื้อใบอนุญาตสำหรับโปรแกรม MATLAB เพื่อการวิจัยและการจัดการเรียนการสอน รวมทั้งการอำนวยความสะดวกในการดำเนินการวิจัย จนทำให้การดำเนินงานบรรลุผลสำเร็จตามเป้าหมาย

References

[1] B. Inan, A.R. Bahadir, "An explicit exponential finite difference method for the Burgers' equation". European International Journal of Science and Technology, Vol.2,No10,(2013),61-69

[2] E. Hopf., "The partial Difference Equation $u_t + uu_x = uu_{xx}$", Comm. Pure Appl. Maths. 3,(1950), 201-230

[3] J.D. Cole. (2013), "On a Quasilinear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics", Quart. Appl. Maths. 9,(2013), 225-236

[4] P.G. Zhang, J.P. Wang., "A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation". Applied Mathematics and Computation, 219,(2012), 892-898

[5] R.C. Sarker, L.S. Andallah., "Numerical Solution of Burger's equation via Cole-Hopf transformed diffusion equation", European International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 6,(2013), 1405-1409

[6] R.W. MacCormack, " The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering", AIAA Paper,(1969), 69-354

[7] S.K. Lele, "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution", Journal of Computational Physics, 103,(1992), 16-42

[8] S.Kutluay, A.Esen, I. Dagb., " Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method". J.Comput.Appl.Math.16, (2014), 21-33

[9] Y.C. Hon , X.Z. Mao., "An efficient numerical scheme for Burgers' equation", Applied Mathematics and Computation, 95,(1998) 37-50