

แบบฝึกหัดปริพันธ์สามชั้น ชุดที่ 1

1. จงหาค่าของปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1
$$\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

1.2
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy dy dx dz$$

1.3
$$\int_{1/3}^{1/2} \int_0^\pi \int_0^1 xz \sin xy dz dy dx$$

1.4
$$\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y dy dz dx$$

1.5
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x dz dy dx$$

1.6
$$\int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y dz dx dy$$

1.7
$$\int_1^2 \int_z^2 \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy dz$$

1.8
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x+y+z) dz dx dy$$

1.9
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \sin y dy dz dx$$

1.10
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1} dx dz dy$$

1.11
$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\ln y} e^{z+2x} dz dx dy$$

1.12
$$\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} dx dy dz$$

1.13
$$\int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t dt dr ds$$

1.14
$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz dx dy$$

2. จงหาค่าของปริพันธ์ต่อไปนี้ (หมายเหตุ : ควรหาปริพันธ์โดยการแปลงระบบพิกัด)

2.1
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz dz dx dy$$

2.2
$$\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

2.3
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz dy dx$$

2.2
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{(x^2+y^2)^2}^{16} x^2 dz dy dx$$

2.4
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_0^{4-x^2-z^2} \sqrt{x^2+z^2} dy dx dz$$

2.6
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{1-y^2-z^2} y^2 dx dz dy$$

2.7
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{4-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$$

2.8
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$$

2.9
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy$$

2.10
$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dx dy$$

2.11
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy dz dy dx$$

2.12
$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3) dz dx dy$$

2.13
$$\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_3^{\sqrt{10-x^2-y^2}} (y-x) dz dy dx$$

2.14
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dz dy dx$$

3. จงหาค่าของปริพันธ์ของ $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-(y^2+z^2)}^{(y^2+z^2)} 21zy^2 dx dy dz$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกระบอก

4. จงหาค่าของปริพันธ์ของ $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

5. จงหาค่าของปริพันธ์สามชั้นต่อไปนี้

$$5.1 \quad \iiint_G y \, dV \quad \text{เมื่อ } G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\}$$

$$5.2 \quad \iiint_G e^{z/y} \, dV \quad \text{เมื่อ } G = \{(x, y, z) \mid y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$$

$$5.3 \quad \iiint_G \frac{z}{x^2 + z^2} \, dV \quad \text{เมื่อ } G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq z, 1 \leq y \leq 4, y \leq z \leq 4\}$$

$$5.4 \quad \iiint_G \sin y \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งอยู่ใต้ระนาบ } z = x \text{ และอยู่เหนือบริเวณรูป}$$

สามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$ และ $(0, \pi, 0)$

$$5.5 \quad \iiint_G 6xy \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งอยู่ใต้ระนาบ } z = 1 + x + y \text{ และอยู่เหนือบริเวณซึ่งอยู่}$$

ในระนาบ xy ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$, เส้นตรง $y = 0$ และ $x = 1$

$$5.6 \quad \iiint_G x \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพาราโบลอยด์ } x = 4y^2 + 4z^2 \text{ และ}$$

ระนาบ $x = 4$

$$5.7 \quad \iiint_G z \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยทรงกระบอก } y^2 + z^2 = 9 \text{ และระนาบ}$$

$x = 0$, $y = 3x$ และ $z = 0$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

$$5.8 \quad \iiint_G y^2 z^2 \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ } x = 1 - y^2 - z^2 \text{ และ}$$

ระนาบ $x = 0$

$$5.9 \quad \iiint_G z \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งถูกล้อมรอบด้วยทรงกระบอก } y^2 + z^2 = 1 \text{ และระนาบ}$$

$y = 0$, $x + y = 2$ และ $z = 0$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

$$5.10 \quad \iiint_G yz \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งอยู่เหนือระนาบ } z = 0 \text{ และอยู่ใต้ระนาบ } z = y \text{ และ}$$

ถูกล้อมรอบด้านข้างด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$

$$5.11 \quad \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก } x^2 + y^2 = 16 \text{ และอยู่}$$

ระหว่างระนาบ $z = -5$ และ $z = 4$

$$5.12 \quad \iiint_G (x + y + z) \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ } z = 4 - x^2 - y^2$$

ในอัฐภาคที่หนึ่ง

$$5.13 \quad \iiint_G x^2 \, dV \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก } x^2 + y^2 = 1 \text{ เหนือระนาบ}$$

$z = 0$ และอยู่ภายใต้กรวย $z^2 = 4x^2 + 4y^2$

5.14 $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV$ เมื่อ G เป็นรูปทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมีเท่ากับ 5

5.15 $\iiint_G (x^2 + y^2) dV$ เมื่อ G เป็นรูปทรงสามมิติซึ่งอยู่ระหว่างทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$