

แบบฝึกหัด อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x, y) = x^4 y^3 + 8x^2 y$

1.2 $z = (2x + 3y)^{10}$

1.3 $R(p, q) = e^{-p} \arctan(pq^2)$

1.4 $f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$

1.5 $f(u, v) = u^3 \ln(1 + uv^{-3/5})$

1.6 $f(r, \theta) = \sin(r \cos \theta) + \ln(r^2 + 3\theta^2)$

1.7 $f(x, y, z) = xy - 5x^2 y^3 z^4$

1.8 $f(x, y) = \cos(\sqrt{x}) \sin^2(xy^2)$

1.9 $w = ze^{xyz}$

1.10 $u(x, y, z) = x^2 y \cos\left(\frac{z}{x}\right)$

1.11 $\phi(x, y, z, t) = \frac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

1.12 $f(x, y, z) = xyz - xe^{yz} + x \ln z$

1.13 $f(x, y) = \ln(\sec \sqrt{x+y})$

1.14 $V = xe^{2x-y} + we^{zw} + yw$

2. กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ จงหา $f_x(1, 0)$ และ $f_y(1, 0)$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ จงหา $f_x(3, 4)$

4. กำหนดให้ $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ จงหา $f_x(2, 3)$

5. กำหนดให้ $f(x, y, z) = \frac{y}{x+y+z}$ จงหา $f_z(0, 0, \frac{\pi}{4})$

6. กำหนดให้ $f(x, y, z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$ จงหา $f_y(2, 1, -1)$

7. กำหนดให้ $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\sin(x^2 y)}$ จงหา $f_x(1, 0)$

8. กำหนดให้ $z = x \sin\left(\frac{x}{y}\right) + ye^{y/x}$ จงแสดงว่า $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

9. กำหนดให้ $u = f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{y+z}{x}\right)$ จงแสดงว่า $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 2f$

10. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} และ f_{yy} ของฟังก์ชันต่อไปนี้

10.1 $f(x, y) = x^3 y^5 + 2x^4 y$

10.2 $f(x, y) = \cos^3(mx + ny)$

10.3 $f(x, y) = \operatorname{arc} \cot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

10.4 $f(x, y) = \ln(x + 2y)$

11. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันต่อไปนี้

11.1 กำหนดให้ $f(x, y) = x^4 y^2 - x^3 y$ จงหา f_{xxx} และ f_{xyx}

11.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \sin(2x + 5y)$ จงหา f_{yxy}

11.3 กำหนดให้ $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$ จงหา f_{xyz}

11.4 กำหนดให้ $g(r, s, t) = e^r \sin(st)$ จงหา g_{rst}

11.5 กำหนดให้ $u = e^{r\theta} \sin \theta$ จงหา $\frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

11.6 กำหนดให้ $z = u\sqrt{v-w}$ จงหา $\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$

11.7 กำหนดให้ $w = \frac{x}{y+2z}$ จงหา $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$ และ $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

11.8 กำหนดให้ $u = x^a y^b z^c$ จงหา $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$

11.9 กำหนดให้ $f(x, y, z) = xy^2 z^3 + \arcsin(x\sqrt{z})$ จงหา f_{xzy}

11.10 กำหนดให้ $g(x, y, z) = \sqrt{1+xz} + \sqrt{1-xy}$ จงหา g_{xyz}

12. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

12.1 $u = x^2 - y^2 + 2xy$

12.2 $u = \ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

12.3 $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

13. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นผลเฉลยของสมการคลื่น $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

13.1 $u = \sin(kx) \sin(akt)$

13.2 $u = \frac{t}{a^2 t^2 - x^2}$

13.3 $u = \sin(x - at) + \ln(x + at)$

14. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \sin kx$ เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

15. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $z = \ln(e^x + e^y)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

16. ถ้า $u = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$ เมื่อ $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ แล้ว จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$

17. จงหา f_x และ f_y โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่ 1 เมื่อ

17.1 $f(x, y) = \int_y^x e^{t^2} dt$

17.2 $f(x, y) = \int_0^{x^2 y^3} \sin t^3 dt$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่ 1

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้วฟังก์ชัน F นิยามโดย

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ซึ่ง $F'(x) = f(x)$

นั่นคือ

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t)dt \right] = f(x)$$

$$18. \text{ กำหนดให้ } f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3} \text{ จงแสดงว่า } f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

แนะนำ : ในการแสดง $f_x(0, 0) = 0$ ควรหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้นิยาม