

แบบฝึกหัด การหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้กฎลูกโซ่

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 กำหนดให้ $z = x^2y + 3xy^4$ เมื่อ $x = \sin 2t$ และ $y = \cos t$ จงหา $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0}$

1.2 กำหนดให้ $z = e^x \sin y$ เมื่อ $x = st^2$ และ $y = s^2t$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.3 กำหนดให้ $u = x^4y + y^2z^3$ เมื่อ $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ และ $z = r^2s \sin t$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial s}$ ที่ $r = 2$, $s = 1$ และ $t = 0$

1.4 กำหนดให้ $z = x^2 + y^2 + xy$ เมื่อ $x = \sin t$ และ $y = e^t$ จงหา $\frac{dz}{dt}$ ในเทอมของ t

1.5 กำหนดให้ $z = \cos(x + 4y)$ เมื่อ $x = 5t^4$ และ $y = 1/t$ จงหา $\frac{dz}{dt}$ ในเทอมของ t

1.6 กำหนดให้ $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ เมื่อ $x = e^t$ และ $y = 1 - e^{-t}$ จงหา $\frac{dz}{dt}$ ในเทอมของ t

1.7 กำหนดให้ $w = xe^{y/z}$ เมื่อ $x = t^2$, $y = 1 - t$ และ $z = 1 + 2t$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ในเทอมของ t

1.8 กำหนดให้ $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ เมื่อ $x = \sin t$, $y = \cos t$ และ $z = \tan t$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ในเทอมของ t

1.9 กำหนดให้ $z = x^2y^3$ เมื่อ $x = s \cos t$ และ $y = s \sin t$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.10 กำหนดให้ $z = \arcsin(x - y)$ เมื่อ $x = s^2 + t^2$ และ $y = 1 - 2st$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.11 กำหนดให้ $z = \sin \theta \cos \phi$ เมื่อ $\theta = st^2$ และ $t = s^2t$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.12 กำหนดให้ $z = e^{x+2y}$ เมื่อ $x = s/t$ และ $y = t/s$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.13 กำหนดให้ $z = e^r \cos \theta$ เมื่อ $r = st$ และ $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.14 กำหนดให้ $z = \arcsin(x - y)$ เมื่อ $x = s^2 + t^2$ และ $y = 1 - 2st$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.15 กำหนดให้ $z = \tan(u/v)$ เมื่อ $u = 2s + 3t$ และ $v = 3s - 2t$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ในเทอมของ s และ t

1.16 กำหนดให้ $z = x^4 + x^2y$ เมื่อ $x = s + 2t - u$ และ $y = stu^2$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ และ $\frac{\partial z}{\partial u}$ เมื่อ $s = 4$, $t = 2$ และ $u = 1$

1.17 กำหนดให้ $T = \frac{v}{2u+v}$ เมื่อ $u = pq\sqrt{r}$ และ $v = pr\sqrt{q}$ จงหา $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$ และ $\frac{\partial T}{\partial r}$

เมื่อ $p = 2$, $q = 1$ และ $r = 4$

1.18 กำหนดให้ $w = xy + xz + yz$ เมื่อ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ และ $z = r\theta$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial r}$ และ $\frac{\partial w}{\partial \theta}$

เมื่อ $r = 2$ และ $\theta = \pi/2$

1.19 กำหนดให้ $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ เมื่อ $u = xe^y$, $v = ye^x$ และ $w = e^{xy}$ จงหา $\frac{\partial P}{\partial x}$ และ $\frac{\partial P}{\partial y}$

เมื่อ $x = 0$ และ $y = 2$

1.20 กำหนดให้ $N = \frac{p+q}{p+r}$ เมื่อ $p = u+vw$, $q = v+uw$ และ $r = w+uv$ จงหา $\frac{\partial N}{\partial u}$, $\frac{\partial N}{\partial v}$

และ $\frac{\partial N}{\partial w}$ เมื่อ $u = 2$, $v = 3$ และ $r = 4$

1.21 กำหนดให้ $u = xe^{ty}$ เมื่อ $x = \alpha^2 \beta$, $y = \beta^2 \gamma$ และ $t = \gamma^2 \alpha$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ และ $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$

เมื่อ $\alpha = -1$, $\beta = 2$ และ $\gamma = 1$

1.22 กำหนดให้ $z = xye^{x/y}$ เมื่อ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial r} \Big|_{r=2, \theta=\pi/6}$ และ $\frac{\partial z}{\partial \theta} \Big|_{r=2, \theta=\pi/6}$

1.23 กำหนดให้ $w = 4x^2 + 4y^2 + z^2$ เมื่อ $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ และ $z = \rho \cos \phi$

จงหา $\frac{\partial w}{\partial \rho}$, $\frac{\partial w}{\partial \phi}$ และ $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ ในเทอมของ ρ , ϕ และ θ

1.24 กำหนดให้ $w = r^2 - r \tan \theta$ เมื่อ $r = \sqrt{s}$ และ $\theta = \pi s$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{s=1/4}$

1.25 กำหนดให้ $z = 3x - 2y$ เมื่อ $x = u + v \ln u$ และ $y = u^2 - v \ln v$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial u}$ และ $\frac{\partial z}{\partial v}$

ในเทอมของ u และ v

1.26 กำหนดให้ $w = x^2 + y^2$ เมื่อ $x = \cos t + \sin t$ และ $y = \cos t - \sin t$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ที่ $t = 0$

1.27 กำหนดให้ $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ เมื่อ $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$ และ $z = 1/t$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ที่ $t = 3$

1.28 กำหนดให้ $w = 2ye^x - \ln z$ เมื่อ $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \arctan t$ และ $z = e^t$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ที่ $t = 1$

1.29 กำหนดให้ $w = z - \sin xy$ เมื่อ $x = t$, $y = \ln t$ และ $z = e^{t-1}$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ที่ $t = 1$

1.30 กำหนดให้ $z = 4e^x \ln y$ เมื่อ $x = \ln(u \cos v)$ และ $y = u \sin v$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial u}$ และ $\frac{\partial z}{\partial v}$

ที่ $(u, v) = (2, \pi/4)$

1.31 กำหนดให้ $z = \arctan(x/y)$ เมื่อ $x = u \cos v$ และ $y = u \sin v$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial u}$ และ $\frac{\partial z}{\partial v}$

ที่ $(u, v) = (1.3, \pi/6)$

- 1.32 กำหนดให้ $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ เมื่อ $x = ue^v \sin u$, $y = ue^v \cos u$ และ $z = ue^v$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial u}$ และ $\frac{\partial w}{\partial v}$ ที่ $(u, v) = (-2, 0)$
- 1.33 กำหนดให้ $u = e^{qr} \arcsin p$ เมื่อ $p = \sin x$, $q = z^2 \ln y$ และ $r = 1/z$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ และ $\frac{\partial u}{\partial z}$ เมื่อ $x = \pi/4$, $y = 1/2$ และ $z = -1/2$
- 1.34 กำหนดให้ $w = (x + y + z)^2$ เมื่อ $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$ และ $z = \sin(s - r)$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial r}$ ในเทอมของ r และ s
- 1.35 กำหนดให้ $w = \ln(3x^2 - 2y + 4z^3)$ เมื่อ $x = t^{1/2}$, $y = t^{2/3}$ และ $z = t^{-2}$ จงหา $\frac{dw}{dt}$ ในเทอมของ t
- 1.36 กำหนดให้ $w = 3xy^2z^3$ เมื่อ $y = 3x^2 + 2$ และ $z = \sqrt{x-1}$ จงหา $\frac{dw}{dx}$
2. ถ้ากำหนดให้ $w = f(x, y, z)$ เมื่อ $y = g(x)$ และ $z = h(x)$ แล้วจงเขียนสูตรของ $\frac{dw}{dx}$
3. กำหนดให้ $w = 3xy^2z^3$ เมื่อ $y = 3x^2 + 2$ และ $z = \sqrt{x-1}$ จงใช้สูตรที่ได้ในข้อ 2. หา $\frac{dw}{dx}$ ในเทอมของ x
4. กำหนดให้ $w = xy + yz$ เมื่อ $y = \sin x$ และ $z = e^x$ จงใช้สูตรที่ได้ในข้อ 2. หา $\frac{dw}{dx}$ ในเทอมของ x
5. ถ้ากำหนดให้ $z = f(u)$ เมื่อ $u = g(x, y)$ แล้วจงเขียนสูตรของ $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ในเทอมของ $\frac{dz}{du}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$
6. กำหนดให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงใช้สูตรที่ได้ในข้อ 5. เพื่อแสดงว่า $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
7. กำหนดให้ $z = f(xy)$ จงใช้สูตรที่ได้ในข้อ 5. เพื่อแสดงว่า $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
8. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ของหนึ่งตัวแปร และกำหนดให้ $w = f(u)$ เมื่อ $u = x + 2y + 3z$ จงแสดงว่า $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6 \frac{dw}{du}$
9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ของหนึ่งตัวแปร และกำหนดให้ $w = f(\rho)$ เมื่อ $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ จงแสดงว่า $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2$
10. ถ้ากำหนดให้ $z = f(x, y)$ เมื่อ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$
- 10.1 จงหา $\frac{\partial z}{\partial r}$ และ $\frac{\partial z}{\partial \theta}$
- 10.2 จงแสดงว่า $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$