แบบฝึกหัดปริพันธ์ตามเส้น ชุดที่ 2

1. จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหาค่าของปริพันธ์ตามเส้นโค้งต่อไปนี้

1.1 $\oint_C y^2dx+x^2dy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมที่ถูกล้อมรอบโดยเส้นตรง $x=0$, $x+y=1$ และ $y=0$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.2 $\oint_C (6y+x)dx+(y+2x)dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.3 $\oint_C 3ydx+2xdy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่ถูกล้อมรอบโดยเงื่อนไข $0\le x\le \pi$ และ $0\le y\le \sin x$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.4 $\oint_C 3xydx+2xydy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมซึ่งถูกล้อมรอบโดยเส้นตรง $x=-2$, $x=4$, $y=1$ และ $y=2$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.5 $\oint_C x\cos ydx-y\sin xdy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(\pi/2,0)$, $(\pi/2,\pi/2)$ และ $(0,\pi/2)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.6 $\oint_C (x^2-y^2)dx+xdy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $x^2+y^2=9$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.7 $\oint_C y\tan^2 xdx+\tan xdy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $x^2+(y+1)^2=1$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.8 $\oint_C (x^2-y)dx+xdy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $x^2+y^2=4$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.9 $\oint_C (e^x+y^2)dx+(e^y+x^2)dy$ เมื่อ C เป็นเส้นขอบของบริเวณซึ่งอยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y=x^2$ และเส้นตรง $y=x$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.10 $\oint_C \ln(1+y)dx-\frac{xy}{1+y}dy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(2,0)$ และ $(0,4)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.11 $\oint_C \arctan ydx-\frac{y^2x}{1+y^2}dy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ และ $(0,1)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.12 $\oint_C x^2ydx-y^2xdy$ เมื่อ C เป็นเส้นขอบของบริเวณในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งถูกปิดล้อมด้วยแกนพิกัดและวงกลม $x^2+y^2=16$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.13 $\oint_C \cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(3,3)$ และ $(0,3)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.14 $\oint_C x^2 y dx + \left(y + xy^2\right) dy$ เมื่อ C เป็นเส้นขอบของบริเวณซึ่งอยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $x = y^2$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.15 $\oint_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(2x + \cos y^2\right) dy$ เมื่อ C เป็นเส้นขอบของบริเวณซึ่งอยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $x = y^2$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.16 $\oint_C \left(1 - y^3\right) dx + \left(x^3 + e^{y^2}\right) dy$ เมื่อ C เป็นเส้นขอบของบริเวณซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 = 9$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.17 $\oint_C y^4 dx + 2xy^3 dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $x^2 + 2y^2 = 2$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

1.18 $\oint_C \cos y dx + x^2 \sin y dy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,2)$ และ $(0,2)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

2. จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหางานที่เกิดจากแรง $\vec{F}$ กระทำบนวัตถุ แล้วทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง C เมื่อ

2.1 $\vec{F}(x, y) = (y\cos x - xy\sin x)\vec{i} + (xy + x\cos x)\vec{j}$ และ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(0,4)$ และ $(2,0)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

2.2 $\vec{F}(x, y) = (y - \cos y)\vec{i} + (x\sin y)\vec{j}$ และ C เป็นเส้นโค้ง $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ ในทิศตามเข็มนาฬิกา

2.3 $\vec{F}(x, y) = \sqrt{x^2+1}\,\vec{i} + \arctan x\,\vec{j}$ และ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$, $(1,1)$ และ $(0,1)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

2.4 $\vec{F}(x, y) = \sqrt{y}\,\vec{i} + \sqrt{x}\,\vec{j}$ และ C เป็นเส้นโค้งปิดซึ่งประกอบด้วยเส้นตรง $y = 0$, $x = 2$ และเส้นโค้ง $y = x^3/4$ ในทิศตามเข็มนาฬิกา

2.5 $\vec{F}(x, y) = xy\,\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\vec{j}$ และ C เป็นเส้นขอบของบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{25 - x^2}$ และแกน x ในทิศตามเข็มนาฬิกา